

Lista zadań z rachunku lambda nr 3 16 marca 2019

Zad. 1. Udowodnij, że jeżeli $x \neq y$ oraz $x, y \notin FV(L)$, to

$$M[x := N][y := L] = M[y := L][x := N][y := L].$$

Zad. 2. Udowodnij, że jeżeli $x \neq y$, $x \notin FV(L)$, a także term N jest podstawialny za x w M , to

$$M[x := N][y := L] = M[y := L][x := N[y := L]].$$

Zad. 3. Przyjmijmy, że

$$P = \lambda xyz. x(\lambda pq.q(py))(Kz)I.$$

Pokaż, że $Pc_0 = c_0$ oraz $Pc_{n+1} = c_n$ (symbol c_n oznacza numerał Churcha). Może komuś uda się odtworzyć sposób myślenia twórcy, który znalazł taki term P ?

Zad. 4. Relacja równoległej β -redukcji (w jednym kroku) $\rightarrow_{r\beta}$ jest najmniejszą relacją w zbiorze λ -termów (klas abstrakcji α -konwersji) spełniającą

- 1) $M \rightarrow_{r\beta} M$,
- 2) jeżeli $M \rightarrow_{r\beta} M_1$, $N \rightarrow_{r\beta} N_1$ i N_1 jest podstawialny za zmienną x w termie M_1 , to $(\lambda x M)N \rightarrow_{r\beta} M_1[x := N_1]$,
- 3) jeżeli $M \rightarrow_{r\beta} M_1$ oraz $N \rightarrow_{r\beta} N_1$, to $MN \rightarrow_{r\beta} M_1N_1$,
- 4) jeżeli $M \rightarrow_{r\beta} M_1$, to $\lambda x M \rightarrow_{r\beta} \lambda x M_1$.

Wyjaśnij intuicyjnie różnice między β -redukcją i równoległą β -redukcją, a ponadto

- 1) pokaż, że relacja $\rightarrow_{r\beta}$ jest zgodna z działaniami,
- 2) udowodnij, że $\rightarrow_{\beta} \subseteq \rightarrow_{r\beta} \subseteq \twoheadrightarrow_{\beta}$,
- 3) wywnioskuj z poprzedniego punktu, że redukcje $\twoheadrightarrow_{\beta}$ i $\twoheadrightarrow_{r\beta}$ są identyczne.

Zad. 5. Rozszerzymy nieco pojęcie λ -termu dopuszczając stosowanie wielu różnych operatorów λ . Zwykły operator będziemy określać jako bezbarwny, pozostałe – jako kolorowe. Możemy mieć wiele rodzajów kolorowych operatorów, na razie będziemy je oznaczać wspólnym symbolem $\underline{\lambda}$. Potrzebne nam będą termy z kolorowymi redeksami. Definiujemy je analogicznie, jak λ -termy, w końcu będziemy je uważać za klasy abstrakcji α -konwersji. Definiując termy z kolorowymi redeksami przepisujemy literalnie definicję α -termu (w szczególności tworząc abstrakcję używamy wyłącznie bezbarwnego operatora λ) i dodajemy do niej jeszcze jeden warunek pozwalający z dwóch termów z kolorowymi redeksami M i N utworzyć term z kolorowymi redeksami będący redeksem $(\underline{\lambda}xM)N$. Wykonując podstawienia ignorujemy kolory operatorów, ale także ich nie zmieniamy. Teraz dla takich termów standardowo definiujemy β -redukcję. Relację $(\underline{\lambda}xM)N \rightarrow_{\beta} M[x := N]$ (tylko dla kolorowych redeksów) najpierw rozszerzamy do relacji zgodnej, następnie do przechodniej i zwrotnej, w końcu do symetrycznej (nie wprowadzamy specjalnych oznaczeń). Udowodnij, że dla każdego termu z kolorowymi redeksami M istnieje term N bez kolorowych redeksów taki, że $M \twoheadrightarrow_{\beta} N$. Wskazówka: trzeba przeanalizować odpowiednie przykłady, np. $(\lambda x xx)(\lambda x xx)$, i zastanowić się dlaczego λ -termy możemy redukować w nieskończoność, dlaczego stale mogą pojawiać się nowe redeksy i jak temu można przeciwdziałać w przypadku kolorowych redeksów.

Zad. 6. Jeżeli stopień wyjściowy każdego wierzchołka grafu $G_\beta(M)$ jest dodatni, to w tym grafie istnieje nieskończona ścieżka. Jeżeli każda ścieżka w grafie jest skończona, to graf jest skończony i ma wierzchołek o stopniu wyjściowym 0.

Zad. 7. Narysuj grafy $G_\beta(M)$ dla termu M takiego, że $M = AA$, gdzie $A = \lambda x.(\lambda y.yy)x$.

Zad. 8. Skonstruuj term M taki, że $G_\beta(M)$ składa się z czterech wierzchołków $M = M_0, M_1, M_2, M_3$ takich, że $M_i \rightarrow M_{i+1 \bmod 4}$ dla $i = 0, 1, 2, 3$ (i nie ma innych połączeń w tym grafie). Uogólnij konstrukcję na dowolną liczbę wierzchołków.

Zad. 9. Skonstruuj term M taki, że $G_\beta(M)$ składa się z trzech wierzchołków $M = M_0, M_1, M_2$ takich, że $M_i \rightarrow M_{i+1}$ oraz $M_i \rightarrow M_{i-1 \bmod 3}$ dla $i = 0, 1$ (i nie ma innych połączeń w tym grafie).

Zad. 10. Pokaż, że nie istnieje wyrażenie M takie, że graf $G_\beta(M)$ ma pięć elementów takich, że $M \rightarrow K_i$ oraz $K_i \rightarrow N$ dla $i = 0, 1, 2$ (i nie ma innych połączeń w tym grafie).

Zad. 11. Pokaż, że jeżeli $M = AAx$ i $A = \lambda axz.z(aax)$, to graf $G_\beta(M)$ zawiera jako podgraf graf krawędzi sześciangu (a nawet graf krawędzi kostki euklidesowej dowolnego wymiaru).

Część 2. Zadania dodatkowe o grafach redukcji, wszystkie, niemal każde jest znalezione, w większości u Barendregta.

Definicja. Dla λ -wyrażenia M będziemy rozważać graf skierowany $G_\beta(M)$. Właściwie jest to multigraf, który może mieć wiele krawędzi między dwoma wierzchołkami. Wierzchołkami tego grafu są termy N (klasy abstrakcji relacji α -konwersji) takie, że $M \twoheadrightarrow_\beta N$. Wierzchołki N_1 i N_2 są połączone krawędzią (od pierwszego do drugiego), jeżeli $N_1 \rightarrow_\beta N_2$ (redukcja pewnego redeksu w termie N_1 daje term N_2).

Zad. 12. Jeżeli stopień wyjściowy każdego wierzchołka grafu $G_\beta(M)$ jest dodatni, to w tym grafie istnieje nieskończona ścieżka. Jeżeli każda ścieżka w grafie jest skończona, to graf jest skończony i ma wierzchołek o stopniu wyjściowym 0.

Zad. 13. Narysuj grafy $G_\beta(M)$ dla następujących wyrażeń M :

- 1) $M = II(III)$,
- 2) $M = WWW$, gdzie $W = \lambda xy.xyy$,
- 3) $M = WI(WI)$, gdzie $W = \lambda xy.xyy$,
- 4) $M = AA$, gdzie $A = \lambda x.(\lambda y.yy)x$,
- 5) $M = (\lambda x.Ixx)(\lambda x.Ixx)$,
- 6) $M = (\lambda x.I(xx))(\lambda x.I(xx))$,
- 7) $M = HIH$, gdzie $H = \lambda xy.x(\lambda z.yzy)x$,
- 8) $M = PQ$, gdzie $P = \lambda u.uIu$ oraz $Q = \lambda xy.xyI(xy)$
- 9) $M = LLI$, gdzie $L = \lambda xy.x(yy)x$.

Zad. 14. Skonstruuj term M taki, że $G_\beta(M)$ składa się z czterech wierzchołków $M = M_0, M_1, M_2, M_3$ takich, że $M_i \rightarrow M_{i+1 \bmod 4}$ dla $i = 0, 1, 2, 3$ (i nie ma innych połączeń w tym grafie). Uogólnij konstrukcję na dowolną liczbę wierzchołków.

Zad. 15. Skonstruuj term M taki, że $G_\beta(M)$ składa się z czterech wierzchołków $M = M_0, M_1, M_2, M_3$ takich, że $M_i \rightarrow M_{i+1 \bmod 4}$ i $M_i \rightarrow M_i$ dla $i = 0, 1, 2, 3$ (i nie ma innych połączeń w tym grafie). Uogólnij konstrukcję na dowolną liczbę wierzchołków.

Zad. 16. Skonstruuj term M taki, że $G_\beta(M)$ składa się z trzech wierzchołków $M = M_0, M_1, M_2$ takich, że $M_i \rightarrow M_{i+1}$ oraz $M_i \rightarrow M_{i-1 \bmod 3}$ dla $i = 0, 1$ (i nie ma innych połączeń w tym grafie).

Zad. 17. Skonstruuj term M taki, że $G_\beta(M)$ składa się z trzech wierzchołków $M = M_0, M_1, M_2$ takich, że $M_i \rightarrow M_{i+1 \bmod 3}$ dla $i = 0, 1, 2$ oraz $M_1 \rightarrow M_0$ (i nie ma innych połączeń w tym grafie). Tego zadania może nie da się rozwiązać.

Zad. 18. Skonstruuj term M taki, że $G_\beta(M)$ składa się z trzech wierzchołków $M = M_0, M_1, M_2$ takich, że $M_i \rightarrow M_{i+1}$ oraz $M_i \rightarrow M_i$ dla $i = 0, 1$ (i nie ma innych połączeń w tym grafie).

Zad. 19. Skonstruuj term $M = M_{0,0}$ taki, że $G_\beta(M)$ składa się z nieskończenie wielu wierzchołków $M_{i,j}$ dla $i, j \in N$, $i < 3$ takich, że $M_{i,j} \rightarrow M_{i+1 \bmod 3, j}$ i $M_{i,j} \rightarrow M_{i, j+1}$ dla wszystkich możliwych $i = 0, 1, 2$, $j \in N$ (i nie ma innych połączeń w tym grafie).

Zad. 20. Pokaż, że jest dokładnie jeden term M z jednoelementowym grafem $G_\beta(M)$, taki że $M \rightarrow M$.

Zad. 21. Pokaż, że nie istnieje wyrażenie M takie, że graf $G_\beta(M)$ ma pięć elementów takich, że $M \rightarrow K_i$ oraz $K_i \rightarrow N$ dla $i = 0, 1, 2$ (i nie ma innych połączeń w tym grafie).

Zad. 22. Pokaż, że jeżeli $M = AAx$ i $A = \lambda axz.z(aax)$, to graf $G_\beta(M)$ zawiera jako podgraf graf krawędzi sześcianu (a nawet graf krawędzi kostki euklidesowej dowolnego wymiaru).