Egzaminacyjna lista zadań z Rachunku Lambda.

Antoni Kościelski

(Zagadnienia poruszone na wykładzie i przykładowe zadania, proszę zwrócić szczególną uwagę na 1) definicje, 2) twierdzenia, a także 3) dowody twierdzeń)

1 Algebry kombinatoryjne

Aby być w zgodzie z terminologią Barendregta powinniśmy się posługiwać następującymi pojęciami: algebra aplikacyjna to algebra z dwuelementowym działaniem, algebra kombinatoryjna (kombinatorów) to algebra aplikacyjna z dwoma elementami K i S o wiadomych własnościach, często zakłada się dodatkowo, że jest przynajmniej dwuelementowa.

Kombinatory S i K. Twierdzenie wyrażające główną własność algebr kombinatoryjnych, czyli kombinatoryjną zupełność. Dowód tego twierdzenia.

Zad. 1.1. Wyraź za pomocą kombinatorów S i K termy Z taki, że $Zfgx = f(gx)$ oraz U taki, że $Uxy = xx$.

Zad. 1.2. Pokaż, że algebra kombinatoryjna o przynajmniej dwóch elementach jest nieskończona.

Zad. 1.3. Trochę modyfikujemy definicję algebry kombinatoryjnej (nie zmieniając nazwy). Jest to teraz algebra z czterema stałymi S, I, B, C spełniającymi prawa

$$Sxyz = xz(yz), \quad Ix = x, \quad Bxyz = x(yz) \text{ oraz } Cxyz = xzy.$$

Pokaż, że dla każdego wyrażenia $t(x_1, \ldots, x_n)$, w którym występują zmienne $x_1, \ldots, x_n$ w takiej algebrze istnieje term stały T taki, że $T\,x_1 \ldots x_n = t(x_1, \ldots, x_n)$.

2 Sprzeczność termów w algebrach kombinatoryjnych i λ-rachunku

Termy P i Q są niezgodne, jeżeli w algebrze aplikacyjnej, w której zachodzi równość $P = Q$, ewentualnie w λ-rachunku uzupełnionym o równość $P = Q$ można dowieść równość dowolnej pary termów. Mówimy, że teoria jest sprzeczna, jeżeli można w niej uzasadnić wszystkie równości. Teoria w tym kontekscie to zbiór równości, które można uzasadnić w jakiejś wersji λ-rachunku lub zbiór równości spełnionych w jakiejś algebrze aplikacyjnej.

Zad. 2.4. Pokaż, że z każdej z następujących równości

(a) $K = KI$,

(b) $K = I$,

(c) $S = K$

(d) $xx = xy$

(e) $I = \lambda x.xxx$

wynika równość $X = Y$ dla dowolnych termów X i Y. Mówiąc w innym języku, jeżeli w pewnej algebrze aplikacyjnej zachodzi przynajmniej jedna z podanych równości, to jest to algebra jednoelementowa.

Zad. 2.5. Pokaż, że jeżeli w algebrze aplikacyjnej działanie jest łączne lub przemienne, to jest to algebra jednoelementowa.

Zad. 2.6. Udowodnij, że nie istnieje λ-term F taki, że $F(MN) = M$ dla wszystkich termów M i N, chyba że rachunek λ jest sprzeczny.

Zad. 2.7. Pokaż, że termy $\lambda xsz.s(xsz)$ oraz $\lambda xsz.xs(sz)$ definiują (dla numerałów Churcha) operację następnika i są niezgodne.

3 Formalizacja λ-rachunku

Redeksy, relacje α- i β-redukcji, relacje $\to_\beta$, $\twoheadrightarrow_\beta$ i $=_\beta$. Postać normalna termu. Chyba nie muszę przypominać, że znajomość podstawowych definicji jest bardzo ważna.

3.1 Obliczenia w λ-rachunku

Zad. 3.8. Uprość λ-term do postaci normalnej

(a) $(\lambda y.yyy)((\lambda ab.a)I(SS))$

(b) $(\lambda yz.zy)((\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx))(\lambda w.I)$,

(c) $SSSSSSS$.

(d) $(\lambda xyz.zyx)aa(\lambda pq.q)$,

(e) $SKSKSK$.

Zad. 3.9. Zadania o grafach $G_\beta(M)$, patrz odpowiednia lista zadań.

Zad. 3.10. Czy w λ-rachunku jest prawdziwa równość $(\lambda y.(\lambda x.M))N = \lambda x.((\lambda y.M)N)$? Ewentualnie, w jakich przypadkach ta równość jest prawdziwa? Oczywiście, x i y to różne zmienne.

3.2 Ekstensjonalność

Zad. 3.11. Rozszerzamy rachunek lambda o nowe sposoby dowodzenia równości (zachowując dotychczasowe) lub o nowe równości:

(a) o η-redukcję $\lambda x.Mx \to_\eta M$ dla $x \notin FV(M)$, a więc w szczególności przyjmujemy, że $\lambda x.Mx =_\eta M$,

(b) o regułę ekstensjonalności stwierdzającą, że jeżeli $x \notin FV(MN)$ i $Mx = Nx$, to $M = N$,

(c) o równość $I = c_1$.

Pokaż, że w każdym z tych przypadków możemy dowieść dokładnie te same równości.

Zad. 3.12. Pokaż, że w λ-rachunku rozszerzonym o dodatkową regułę dowodzenia równość (regułę ekstensjonalności) stwierdzającą, że z równości $Mx = Nx$ takiej, że $x \notin FV(M) \cup FV(N)$ wynika $M = N$, daje się wyprowadzić równość $\lambda x.\, x(\lambda z.xz) = \lambda x.\, xx$.

4 Formalizacja wartości boolowskich i liczb naturalnych

Numerały Churcha i Barendregta. Systemy liczbowe

Zad. 4.13. Przedstaw odpowiednie definicje związane z reprezentacją w rachunku lambda wartości boolowskich, operacji logicznych, par uporządkowanych, liczb naturalnych. Czy te reprezentacje są poprawne? Dlaczego. Zdefiniuj w rachunku lambda najważniejsze operacje związane z wartościami boolowskimi i liczbami naturalnymi.

Zad. 4.14. Przyjmijmy, że

$$P = \lambda xyz.\, x(\lambda pq.q(py))(Kz)I.$$

Pokaż, że $Pc_0 = c_0$ oraz $Pc_{n+1} = c_n$.

5 Punkty stałe

Twierdzenia o punkcie stałym. Dowody twierdzeń o punkcie stałym. Operatory punktów stałych: $\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$, $(\lambda xf.f(xxf))(\lambda xf.f(xxf))$ oraz $\lambda f.\, A_f\, A_f$, gdzie $A_f \equiv \lambda x.\, f(\lambda z.\, xxz)$. Zastosowania. Punkty stałe są ważne.

Zad. 5.15. Pokaż, że dla dowolnego termu M i dowolnej zmiennej x istnieje term F taki, że $F =_\beta M[x := F]$.

Zad. 5.16. Pokaż, że istnieje M taki, że dla każdego N mamy $MN = MM$.

Zad. 5.17. Pokaż, że $Y(SI) \twoheadrightarrow_\beta \Theta$, gdzie $Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$, a Θ jest zdefiniowane w jednym z poprzednich zadań.

6 λ-obliczalność

Definicja λ-obliczalności. Funkcje rekurencyjne całkowite i częściowe.

Zad. 6.18. Udowodnij, że jeżeli całkowite funkcje $f, g, h : N^2 \to N$ są λ-obliczalne, to λ-obliczalna jest też funkcja $k : N^2 \to N$ zdefiniowana wzorem $k(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$.

Zad. 6.19. Zdefiniuj na dwa sposoby term reprezentujący funkcję $f(n) = n!$. Z operatorem punktu stałego i korzystając z numerałów Churcha jako iteratorów. Można korzystać z wyrażeń reprezentująch w λ-rachunku nastąpnik, poprzednik, mnożenie itp. funkcje.

Zad. 6.20. Znajdź term H taki, że $Hc_{n^2} = c_n$ (lub analogiczny term dla literałów Barendregta).

Zad. 6.21. Funkcję definiowaną przez rekursję prostą wzorami $f(0, n) = g(n)$ oraz $f(m+1, n) = h(f(m, n), m, n)$ można zdefiniować iterując funkcję $k([a, b]) = [a + 1, h(b, a, n)]$ i zauważając, że $k^m([0, g(n)] = [m, f(m, n)]$. W λ-rachunku iterację łatwo wyrazić korzystając z literałów Churcha.

Zad. 6.22. Reprezentowanie w λ-rachunku funkcji definiowanych przez operację minimum.

7 Twierdzenie Churcha-Rossera

Równoległa β-redukcja $\Rightarrow_\beta$ (definicja). Twierdzenie Churcha Rossera. Bardzo ważne jest pierwsze zadanie z tej części. Dowodzenie, że dwa termy nie są (λ-, β-, ?) równe.

Zad. 7.23. Opowiedz o dowodzie twierdzenia Churcha Rossera. Wykaż podstawowe konsekwencje twierdzenie Churcha-Rossera takie, jak niesprzeczność λ-rachunku i jednoznaczność postaci normalnej.

Zad. 7.24. Czy zachodzą równości $(\lambda xyz.(xz)(yz))\lambda u.u =_\beta (\lambda v.v\lambda yzu.u)\lambda x.x$ oraz $(\lambda xy.x\lambda z.z)\lambda a.a =_\beta (\lambda y.y)\lambda bz.z$.

8 Kolorowe redeksy

Redukcja termów z kolorowymi redeksami i jej własności. Rozumowania dotyczące redukcji kolorowych redeksów, było kilka ciekawych. Dla przypomnienia: zostało wspomniane (bez dowodu) twierdzenie Churcha-Rossera, np.: jeżeli dwa termy z kolorowymi redeksami są β-równe, to oba można zredukować w sensie kolorowej β redukcji do tego samego termu, można z niego wyprowadzić jednoznaczność postaci normalnej (dla kolorowej redukcji), został podany łatwy i efektywny sposób szukania redukowania termu do postaci normalnej (w szczególności taka postać normalna istnieje dla każdego termu), zostało dowiedzione twierdzenie o silnej normalizacji, używając termów ze zmiennymi z wagami. Ważny jest dowód tego twierdzenia, a właściwie jego idea.

Zad. 8.25. Wymień własności redukcji termów z kolorowymi redeksami. Jakie własności różnią tę redukcję i β-redukcję.

Zad. 8.26. Pokaż, że term z n kolorowymi redeksami może zostać zredukowany do postaci normalnej (w sensie redukcji z kolorowymi redeksami) w n krokach.

9 Normalna redukcja, obliczalność

Ten temat należy rozszerzyć o inne sposoby rodzaje redukcji (strategie redukowania wyrażeń λ rachunku) oprócz normalnej, a więc o redukcję quasi-normalną, standardową itp. Ważne jest, czy redukcja gwarantuje znalezienie postaci normalnej, o ile ta istnieje, i dlaczego. Czasem należy dostosowywać wyrażenia do sposobu redukcji, patrz część 1 listy 4.

Zad. 9.27. Przypuśćmy, że $M \twoheadrightarrow N$. Przyjmijmy, że λ-termy M' i N' otrzymujemy redukując odpowiednio w termach M i N najbardziej lewy (pierwszy) redeks. Pokaż, że $M' \twoheadrightarrow N'$. Podaj przykład świadczący o tym, że na ogół $M' \not\twoheadrightarrow N$. Wskazówka: oczywiście, w tym zadaniu przydatne są termy z kolorowymi redeksami. Trudno jednak pokolorować redeksy od razu, na początku. Raczej trzeba to robić stopniowo.

Zad. 9.28. Ciąg redukcji $M_0 \to M_1 \to M_2 \to \ldots$ (raczej nieskończony) nazywamy quasi-normalnym, jeżeli w tym ciągu dowolnie daleko występują redukcje, w których jest redukowany najbardziej lewy redeks. Pokaż, że jeżeli dla termu M istnieje nieskończony, quasi-normalny ciąg redukcji $M = M_0 \to M_1 \to M_2 \to \ldots$, to term M nie ma postaci normalnej. Wskazówka: skorzystaj z poprzedniego zadania i twierdzenia o normalizacji.

Zad. 9.29. (a) Pokaż, że $\lambda \not\vdash WWW = \omega_3\omega_3$ dla $W = \lambda xy.xyy$ i $\omega_3 = \lambda x : xxx$.

(b) $\lambda \not\vdash B_x = B_y$ dla $B_z = A_z A_z$ i $A_z = \lambda p.ppz$.

10 Systemy typów

Proste systemy typów Curry'ego i ewentualnie Churcha. Definicje systemów i podstawowe własności. Rozstrzygalność relacji typowania i odpowiedni algorytm. Należy spodziewać się na egzaminie czegoś o systemie typów. Opis logiczny zbioru typów: odpowiednia logika, aksjomaty, pojęcie dowodu, twierdzenie o dedukcji. Odpowiedniość Curre'go-Howarda. System typów polimorficznych $\lambda 2$, definicja, typ termu $\lambda x.xx$.

Zad. 10.30. (a) Podaj wyprowadzenie stwierdzenia $SK : (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \alpha)$,

(b) Podaj wyprowadzenie stwierdzenia $KI : \beta \to (\alpha \to \alpha)$,

(c) Pokaż, że nie daje się wyprowadzić, że $SK : \alpha \to \beta \to \beta$.

(d) Znajdź wspólny β-redukt termów SK i KI. jaki jest najbardziej ogólny typ tego termu.

Zad. 10.31. Znajdź najbardziej ogólne typy (jeżeli istnieją) następujących termów

(a) numerałów Churcha,

(b) $\lambda xy.xyy$, SII, $\lambda xy.y(\lambda z.z(yx))$,

(c) AA, AB, BA, CC, AAA, ABA, BAB, CCC, gdzie $A = \lambda xyz.x(yz)$, $B = \lambda xy.xy$, $C = \lambda xyz.xzy$ (zadania Tomasza Wierzbickiego).

Zad. 10.32. Znajdź termy M i N takie, że

(a) $M : (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$.

(b) $N : (((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$.

Uzasadnij, że wskazane przez Ciebie termy mają odpowiedni typ. Podaj dowód tego typu (czyli pewnej formuły) w logice intuicjonistycznej.

Zad. 10.33. Jakie są typy termów takich, jak $(\lambda xy.\, yx)\, c_n\, c_m$, $(\lambda xy.\, yx)\, c_n\, c_n$, $(\lambda x.\, xx)\, c_n$ w systemie typów prostych, a także w systemie $\lambda 2$.

Zad. 10.34. Pokaż, że żaden λ-term bez zmiennych wolnych nie jest typu $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$.

11 Różne (czasem trudne)

Zad. 11.35. Jeżeli term M jest rozwiązalny, to jest niezgodny z YK.

Zad. 11.36. Term $Y(\lambda cab.b(cb(ca)))$ zaaplikowany do I i KI redukuje się do I (jest rozwiązalny), ale nie postaci normalnej.