Egzaminacyjna lista zadań z rachunku lambda.

Antoni Kościelski

Lista ważniejszych zagadnień poruszonych na wykładzie i przykładowe zadania, proszę zwrócić szczególną uwagę na 1) definicje, 2) twierdzenia, a także 3) dowody twierdzeń.

1 Algebry kombinatoryjne

Aby być w zgodzie z terminologią Barendregta powinniśmy się posługiwać następującymi pojęciami: algebra aplikacyjna to algebra z dwuelementowym działaniem, algebra kombinatoryjna (kombinatorów) to algebra aplikacyjna z dwoma elementami K i S o wiadomych własnościach, często zakłada się dodatkowo, że jest przynajmniej dwuelementowa.

Kombinatory S i K. Algebry kombinatoryjne. Twierdzenie wyrażające główną własność algebr kombinatoryjnych, czyli kombinatoryjną zupełność. Dowód tego twierdzenia.

Zad. 1.1. Wyraź za pomocą kombinatorów S i K termy Z taki, że $Zfgx = f(gx)$ oraz U taki, że $Uxy = xx$.

Zad. 1.2. Pokaż, że w algebrach kombinatoryjnych zachodzi równość

$$Kxy = S(S(KS)(S(KK)K))(K(SKK))xy,$$

a w λ-rachunku dowodzi się także, że

$$K = S(S(KS)(S(KK)K))(K(SKK)).$$

Zad. 1.3. Pokaż, że algebra kombinatoryjna o przynajmniej dwóch elementach jest nieskończona.

Zad. 1.4. Trochę modyfikujemy definicję algebry kombinatoryjnej (nie zmieniając nazwy). Jest to teraz algebra z czterema stałymi S, I, B, C spełniającymi prawa

$$Sxyz = xz(yz), \quad Ix = x, \quad Bxyz = x(yz) \text{ oraz } Cxyz = xzy.$$

Pokaż, że dla każdego wyrażenia $t(x_1, \ldots, x_n)$, w którym występują zmienne $x_1, \ldots, x_n$ w takiej algebrze istnieje term stały T taki, że $T\,x_1 \ldots x_n = t(x_1, \ldots, x_n)$.

2 Sprzeczność termów w algebrach kombinatoryjnych i λ-rachunku

Zad. 2.5. Termy P i Q są niezgodne, jeżeli każda algebra aplikacyjna, w której zachodzi równość $P = Q$, jest jednoelementowa. Termy P i Q są niezgodne w λ-rachunku, jeżeli w tym rachunku uzupełnionym o równość $P = Q$ można dowieść wszystkie równości między termami. Pokaż, że z każdej z następujących równości

(a) $K = KI$,

(b) $K = I$,

(c) $S = K$

(d) $xx = xy$

(e) $I = \lambda x.xxx$

wynika równość $X = Y$ dla dowolnych termów X i Y. Mówiąc w innym języku, jeżeli w pewnej algebrze aplikacyjnej zachodzi przynajmniej jedna z podanych równości, to jest to algebra jednoelementowa.

Zad. 2.6. Pokaż, że jeżeli w algebrze aplikacyjnej działanie jest łączne lub przemienne, to jest to algebra jednoelementowa.

Zad. 2.7. Udowodnij, że nie istnieje λ-term F taki, że $F(MN) = M$ dla wszystkich termów M i N, chyba że rachunek λ jest sprzeczny.

Zad. 2.8. Pokaż, że termy $\lambda xsz.s(xsz)$ oraz $\lambda xsz.xs(sz)$ definiują (dla numerałów Churcha) operację następnika i są niezgodne.

3 Formalizacja λ-rachunku

Redeksy, relacje α-konwersji i β-redukcji, relacje $\to_\beta$, $\twoheadrightarrow_\beta$ i $=_\beta$. Postać normalna termu. Chyba nie muszę przypominać, że znajomość takich definicji jest bardzo ważna.

3.1 Obliczenia w λ-rachunku

Zad. 3.9. Uprość λ-term do postaci normalnej

(a) $(\lambda y.yyy)((\lambda ab.a)I(SS))$

(b) $(\lambda yz.zy)((\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx))(\lambda w.I)$,

(c) $SSSSSSS$.

(d) $(\lambda xyz.zyx)aa(\lambda pq.q)$,

(e) $SKSKSK$.

Zad. 3.10. Zadania o grafach $G_\beta(M)$, patrz odpowiednia lista zadań.

Zad. 3.11. Czy w λ-rachunku jest prawdziwa równość $(\lambda y.(\lambda x.M))N = \lambda x.((\lambda y.M)N)$? Ewentualnie, w jakich przypadkach ta równość jest prawdziwa? Oczywiście, x i y to różne zmienne.

4 Formalizacja w rachunku lambda wartości boolowskich i liczb naturalnych

Numerały Churcha i Barendregta. Systemy liczbowe

Zad. 4.12. Przedstaw odpowiednie definicje związane z reprezentacją w rachunku lambda wartości boolowskich, operacji logicznych, par uporządkowanych, liczb naturalnych. Czy te reprezentacje są poprawne? Dlaczego. Zdefiniuj w rachunku lambda najważniejsze operacje związane z wartościami boolowskimi i liczbami naturalnymi.

Zad. 4.13. Przyjmijmy, że

$$P = \lambda xyz.\ x(\lambda pq.q(py))(Kz)I.$$

Pokaż, że $Pc_0 = c_0$ oraz $Pc_{n+1} = c_n$.

Zad. 4.14. Usunięte.

5 Punkty stałe

Twierdzenia o punkcie stałym. Dowody twierdzeń o punkcie stałym. Operatory punktów stałych: $\mathbf{Y} = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$, $\mathbf{\Theta} = (\lambda xf.f(xxf))(\lambda xf.f(xxf))$ oraz $\lambda f.\ A_f\ A_f$, gdzie $A_f \equiv \lambda x.\ f(\lambda z.\ xxz)$. Zastosowania. Punkty stałe są bardzo ważne.

Zad. 5.15. Pokaż, że dla dowolnego termu M i dowolnej zmiennej x istnieje term F taki, że $F =_\beta M[x := F]$.

Zad. 5.16. Pokaż, że istnieje M taki, że dla każdego N mamy $MN = MM$.

Zad. 5.17. Term $M \in \Lambda$ jest operatorem (kombinatorem) punktu stałego, jeżeli $F\ (M\ F) = M\ F$ dla wszystkich $F \in \Lambda$. Pokaż, że M jest operatorem punktu stałego wtedy i tylko wtedy, gdy $S\ I\ M = M$. Wskazówka: aby zrobić to zadanie trzeba wiedzieć, że jeżeli $x\ (M\ x) = M\ x$ dla zmiennej $x \notin FV(M)$, to M jest abstrakcją. Ten fakt można próbować uzasadniać w następujący sposób: maksymalnie redukując lewą stronę równości powinniśmy otrzymać wyrażenie postaci $x\ (\ldots)$. Redukując prawą stronę też powinniśmy otrzymać to samo wyrażenie, a to jest możliwe tylko wtedy, gdy $M\ x$ jest redeksem.

Zad. 5.18. Pokaż, że $\mathbf{Y}(SI) \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{\Theta}$, gdzie $\mathbf{Y}$ i $\mathbf{\Theta}$ są wyżej zdefiniowane.

6 λ-definiowalność

Definicja λ-definiowalności (reprezentowalności, obliczalności). Definicje funkcji rekurencyjnych całkowitych i częściowych. Twierdzenie o λ-definiowalności funkcji rekurencyjnych z podstawowymi konstrukcjami z dowodu.

Zad. 6.19. Udowodnij, że jeżeli całkowite funkcje $f, g, h : N^2 \to N$ są λ-obliczalne, to λ-obliczalna jest też funkcja $k : N^2 \to N$ zdefiniowana wzorem $k(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$.

Zad. 6.20. Zdefiniuj na dwa sposoby term reprezentujący funkcję $f(n) = n!$. Z operatorem punktu stałego i korzystając z numerałów Churcha jako iteratorów. Można korzystać z wyrażeń reprezentujących w λ-rachunku następnik, poprzednik, mnożenie itp. funkcje.

Zad. 6.21. Znajdź term H taki, że $Hc_{n^2} = c_n$ (lub analogiczny term dla literałów Barendregta).

Zad. 6.22. Funkcję definiowaną przez rekursję prostą wzorami $f(0, n) = g(n)$ oraz $f(m+1, n) = h(f(m, n), m, n)$ można zdefiniować iterując funkcję $k([a, b]) = [a+1, h(b, a, n)]$ i zauważając, że $k^m([0, g(n)] = [m, f(m, n)]$. W λ-rachunku iterację łatwo wyrazić korzystając z literałów Churcha.

Zad. 6.23. Reprezentowanie w λ-rachunku funkcji definiowanych przez operację minimum. Znamy dwie motody: polegającą na użycju operatora punktu stałego i polegającą na dwukrotnym przekazywaniu wymaganych obliczeń, do bieżącego wykorzystania i do wykorzystania w przyszłości.

7 Twierdzenie Churcha-Rossera, równoległa β-redukcja

Twierdzenie Churcha Rossera. Bardzo ważne jest pierwsze zadanie z tej części. Równoległa β-redukcja $\Rightarrow_\beta$ (definicja).

Zad. 7.24. Opowiedz o dowodzie twierdzenia Churcha Rossera. Wykaż podstawowe konsekwencje twierdzenie Churcha-Rossera takie, jak niesprzeczność λ-rachunku i jednoznaczność postaci normalnej.

Zad. 7.25. Czy zachodzą równości $(\lambda xyz.(xz)(yz))\lambda u.u =_\beta (\lambda v.v\lambda yzu.u)\lambda x.x$ oraz $(\lambda xy.x\lambda z.z)\lambda a.a =_\beta (\lambda y.y)\lambda bz.z$.

8 Kolorowe redeksy

Redukcja termów z kolorowymi redeksami i jej własności. Rozumowania dotyczące redukcji kolorowych redeksów, było kilka ciekawych. Słabe i silne twierdzenia o normalizacji.

Zad. 8.26. Wymień własności redukcji termów z kolorowymi redeksami. Jakie własności różnią tę redukcję i β-redukcję.

Zad. 8.27. Pokaż, że term z n kolorowymi redeksami może zostać zredukowany do postaci normalnej (w sensie redukcji z kolorowymi redeksami) w n krokach.

9 Normalna redukcja, obliczalność

Ten temat należy rozszerzyć o inne sposoby rodzaje redukcji (strategie redukowania wyrażeń λ rachunku) oprócz normalnej, a więc o redukcję quasi-normalną, standardową itp. Ważne jest, czy redukcja gwarantuje znalezienie postaci normalnej, o ile ta istnieje, i dlaczego.

Zad. 9.28. Przypuśćmy, że $M \twoheadrightarrow N$. Przyjmijmy, że λ-termy M' i N' otrzymujemy redukując odpowiednio w termach M i N najbardziej lewy (pierwszy) redeks. Pokaż, że $M' \twoheadrightarrow N'$. Podaj przykład świadczący o tym, że na ogół $M' \not\twoheadrightarrow N$. Wskazówka: oczywiście, w tym zadaniu przydatne są termy z kolorowymi redeksami. Trudno jednak pokolorować redeksy od razu, na początku. Raczej trzeba to robić stopniowo.

Zad. 9.29. Ciąg redukcji $M_0 \to M_1 \to M_2 \to \ldots$ (raczej nieskończony) nazywamy quasi-normalnym, jeżeli w tym ciągu dowolnie daleko występują redukcje, w których jest redukowany najbardziej lewy redeks. Pokaż, że jeżeli dla termu M istnieje nieskończony, quasi-normalny ciąg redukcji $M = M_0 \to M_1 \to M_2 \to \ldots$, to term M nie ma postaci normalnej. Wskazówka: skorzystaj z poprzedniego zadania i twierdzenia o normalizacji.

Zad. 9.30.
(a) Pokaż, że $\lambda \not\vdash WWW = \omega_3\omega_3$ dla $W = \lambda xy.xyy$ i $\omega_3 = \lambda x : xxx$.
(b) $\lambda \not\vdash B_x = B_y$ dla $B_z = A_zA_z$ i $A_z = \lambda p.ppz$.

10 Systemy typów

Systemy typów prostych Curry'ego i ewentualnie Churcha. Definicje systemów, reguły wnioskownia o typach i podstawowe własności. Rozstrzygalność relacji typowania i odpowiedni algorytm. Należy spodziewać się na egzaminie czegoś o systemie typów. Opis logiczny zbioru typów: system dedukcji naturalnej w logice intuicjonistycznej, pojęcie dowodu. Odpowiedniość Curre'go-Howarda: wyprowadzenie typu termu wyznacza dowód w logice intuicjonistycznej typu rozumianego jako formuła logiczne. I odwrotnie: mając dowód formuły φ, która może być typem, możemy skonstruować term i wyprowadzenie, że jest to term typu φ odpowiadające dowodowi φ. System typów polimorficznych $\lambda 2$, definicja, reguły wnioskowania, typ termu $\lambda x.xx$ podstawowe własności.

Zad. 10.31. Znajdź najbardziej ogólne typy (jeżeli istnieją) następujących termów

(a) numerałów Churcha,

(b) $\lambda xy.xyy$, SII, $\lambda xy.y(\lambda z.z(yx))$,

(c) AA, AB, BA, CC, AAA, ABA, BAB, CCC, gdzie $A = \lambda xyz.x(yz)$, $B = \lambda xy.xy$, $C = \lambda xyz.xzy$ (zadania Tomasza Wierzbickiego).

Zad. 10.32. Pokaż, że jeżeli $A \vdash \varphi$ (a więc typ φ ma dowód w systemie dedukcji naturalnej w logice intuicjonistycznej, korzystający z pewnego zbioru aksjomatów (założeń) A), to $\Gamma \vdash M : \varphi$ dla pewnego termu M i pewnego kontekstu Γ. Wskazówka: dla każdej formuły $\sigma \in A$ wybieramy zmienną x_σ i tworzymy kontekst $\Gamma = \{x_\sigma : \sigma \mid \sigma \in A\}$. Być może do tego kontekstu trzeba będzie dodać jeszcze inne zmienne typu $\sigma \in A$. Trzeba pamiętać o drobnej różnicy w traktowaniu napisów $\Gamma, x : \varphi$ oraz A, φ.

Zad. 10.33. Znajdź (o ile istnieją) termy M, N i P takie, że

(a) $M : (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$.

(b) $N : (((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$.

(c) $P : ((\alpha \to \alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$.

Zad. 10.34. Jakie są typy termów takich, jak $(\lambda xy.\, yx)\, c_n\, c_m$, $(\lambda xy.\, yx)\, c_n\, c_n$, $(\lambda x.\, xx)\, c_n$ w systemie typów prostych, a także w systemie $\lambda 2$.

Zad. 10.35. Pokaż, że żaden λ-term bez zmiennych wolnych nie jest typu $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$.