Zadanie o hydrze lernejskiej
23 czerwca 2019

1 Hydra lernejska

To takie miłe zwierzątko, które ma wiele głów. Co ciekawsze, jeżeli utnie się mu jakąś, to natychmiast wyrastają mu inne. Dokładniej, to stworzenie informatycy powinni sobie wyobrażać jako drzewo skończone. Korzeń drzewa to miejsce z którego wyrastają skomplikowane szyje zakończone głowami. W interpretacji informatycznej głowy to liście. Pozostałe wezły drzewa to miejsca, w których te skomplikowane szyje mogą się rozgałęziać. Niektórzy z nas nie lubią hydr i próbują uciąć im głowy, nawet wszystkie. Jednym cięciem miecza możemy hydrę pozbawić jednej głowy. Dla informatyków ucięcie głowy hydrze jest tak proste, jak pozbawienie drzewa jednego liścia.

Jeżeli ucięliśmy hydrze głowę wyrastającą bezpośrednio z tułowia (usuwamy liść wyrastający z korzenia) to nic więcej się nie dzieje, a hydra jest tylko nieco zaniepokojona. W przeciwnym razie hydra tworzy mnóstwo nowych głów. Skupmy się na węźle T, z którego wyrastała odcięta głowa. Węzeł T możemy uważać za korzeń pewnego poddrzewa drzewa, jakim jest hydra. Hydra tworzy tyle kopii tego poddrzewa, ile głów jej dotychczas odcięto. Następnie wszystkie korzenie tych poddrzew dołącza do wezła, z którym jest połączony węzeł T (do węzła poprzedzającego T, do rodzica T).

Szczegółowe własności hydr nie są jednoznacznie opisane w literaturze, nawet starożytnej. Możemy umówić się, że zajmujemy się hydrami opisanego rodzaju. Nieco lepiej jest uważać hydrę nie tyle za drzewo, co za parę złożoną z drzewa i liczby naturalnej mówiącej, jak bardzo hydra się rozrasta po ucięciu jej kolejnej głowy. Pozostaje jeszcze problem, co się dzieje z hydrą po ucięciu jej wszystkich głów. W naszym modelu dostajemy wtedy drzewo złożone tylko z jednego węzła, korzenia. Może to także jest liść? Przyjmijmy, że jest to maleńka hydra z jedną nieśmiertelną głową, która natychmiast staje się zielonozłotą jaszczurkę, która może wadzić tylko zwyrodnialcom.

1.1 Zadania

Zad. 1. Czy hydrę lernejską można pozbawić wszystkich głów? (W jakiś być może specjalny sposób.)

Zad. 2. Czy hydrę lernejską można pozbawić wszystkich głów tnąc je jakkolwiek, bez planu?

Zad. 3. Czy da się obliczyć, ile głów trzeba obciąć konkretnej hydrze lernejskiej, aby pozbawić ją wszystkich.

1.2 Trochę więcej terminologii

O głowie (liściu) mówimy, że jest na poziomie 1, jeżeli jest połączona z korzeniem (z liścia do korzenia można przejść ścieżką długości 1).

O głowie (liściu) mówimy, że jest na poziomie 2, jeżeli jest połączona z korzeniem ścieżką długości 2. Analogicznie definiujemy głowy (liście) na dowolnym poziomie n.

Gromadą głów nazywamy zbiór wszystkich głów wyrastających z pewnego węzła, czyli zbiór wszystkich głów (liści) połączonych z ustalonym węzłęm ścieżką długości 1.

Głowę nazywamy zwykłą, jeżeli wyrasta z węzła, w którym zaczynają się wyłącznie ścieżki długości 1 (rzecz jasna, idąc w kierunku liści). Oczywiście, możemy też mówić o zwykłych gromadach głów, złożonych ze zwykłych głów. W przeciwnym razie, głowę i gromadę głów nazywamy istotną.

Co prawda hydra nam niczym nie grozi, ale będziemy nieładnie mówić o walce z hydrą. Możemy ewentualnie za zwycięstwo hydry uznać przedłużenie walki w nieskończoność. Walkę często będziemy prowadzić zgodnie z rycerskimi zasadami ograniczającymi naszą swobodę działania. Oczywiście, będzie nas interesował wynik takiej walki. Będziemy więc dowodzić twierdzenia następującej postaci: *jeżeli będziemy stosować jakiś tam zestaw rycerskich zasad, to bez względu na to z jaką hydrą przyjdzie nam walczyć, walka nie będzie trwała nieskończone długo.* Zwykle będzie to oznaczać, że walka będzie musiała zostać przerwana, ponieważ nie będziemy w stanie już walczyć zgodnie z zadaklarowanymi zasadami.

1.3 Pierwsze lematy

Lemat 1.1 *Jeżeli będziemy ścinać hydrze wyłącznie głowy na poziomie 1, to walka z hydrą nie będzie trwała nieskończenie długo.* □

Lemat 1.2 *Jeżeli będziemy ścinać hydrze albo głowy na poziomie 1, albo pojedyńcze głowy na poziomie 2 (głowy z jednoelementowych gromad), to walka z hydrą nie będzie trwała nieskończenie długo.* □

Lemat 1.3 *Załóżmy, że ścinanie głów albo na poziomie 1, albo z najwyżej k-elementowych gromad na poziomie 2 nie umożliwia hydrze przeprowadzenia nieskończenie długiej walki. Jeżeli w takiej sytuacji będziemy hydrze ścinać głowy albo na poziomie 1, albo z najwyżej $k+1$-elementowych gromad na poziomie 2, to walka z hydrą także nie będzie trwała nieskończenie długo.*

Dowód. Jeżeli będziemy walczyć zgodnie z opisanymi zasadami, to ścięcie którejkolwiek głowy nie spowoduje pojawienia się na poziomie 2 gromady $k+1$ elementowej. Głowę z takiej gromady możemy więc ściąć najwyżej tyle razy, ile hydra ma takich gromad. Jeżeli przestaniemy ścinać hydrze głowy z takich gromad, to dalsza walka będzie mogła trwać najwyżej skończenie długo na mocy przyjętego założenia. □

Wniosek 1.4 *Dla dowolnej liczby naturalnej k, jeżeli będziemy hydrze ścinać głowy albo na poziomie 1, albo z najwyżej k-elementowych gromad na poziomie 2, to walka z hydrą nie będzie trwała nieskończenie długo.* □

Wniosek 1.5 *Jeżeli będziemy hydrze ścinać głowy albo na poziomie 1, albo 2, to walka z hydrą nie będzie trwała nieskończenie długo.* □

1.4 Kilka uwag

Te kilka powyższych lematów możnaby uznać za plan rozwiązania zadania 2: chciałoby się powiedzieć *i tak dalej*. To nie jest takie proste zadanie. Jest to dobre rozwiązanie przy założeniu, że hydra ma głowy na poziomach 1 i 2. Jeżeli hydra ma głowy na trzech poziomach, to ściecie jej głowy na poziomie 2 może spowodować pojawienie się nowych głów na poziomie 3, a ścięcie głowy na poziomie 3 może powodować pojawienie się nowych głów na poziomie 2 i dalsze rozumowanie musi być bardziej skomplikowane.

Gdyby jednak do walki z hydrą dodać warunek bezwzględności, czyli żądanie ścięcia wszystkich głów, które mamy prawo ściąć (nie odkładania ścinania ich na później) i kontynuować rozwiązywanie zadania zgodnie z przedstawionym planem, to prawdopodobnie otrzymalibyśmy kolejny sposób walki z hydrą pozwalający ściąć jej wszystkie głowy w skończonym czasie.

Rozumowanie z poprzedniego akapitu można też uogólnić nieco inaczej, tak by pozwalało wykazać

Lemat 1.6 *Jeżeli będziemy hydrze ścinać głowy tylko na poziomie k, to walka z hydrą nie będzie trwała nieskończenie długo.*

Dowód. Pokazujemy przez indukcję ze względu na l, że zapewnimy sobie skończoność walki ścinając hydrze głowy na poziomie k i dodatkowo ograniczając się do gromad o liczności nie przekraczającej l. Następnie wybieramy dostatecznie duże l, przekraczające liczność gromad głów na poziomie k hydry, z którą przyszło nam walczyć. Z faktu udowodnionego przez indukcję dla tego l otrzymujemy tezę lematu. □

1.5 Zadanie 2 dla hydr z głowami na trzech poziomach

Będziemy terez rozważać hydry, których głowy znajdują się na poziomach 1, 2 i 3.

Lemat 1.7 *Weźmy dowolne k i ustalmy, że walcząc z hydrą ścinamy: jej głowy z poziomu 1, zwykłe głowy z poziomu 2, istotne głowy z poziomu 2 z gromad o liczności nie przekraczającej k i głowy z poziomu 3. Wtedy każda walka prowadzona zgodnie z podanymi zasadami z dowolną hydrą trwa skończenie długo.*

Dowód. Oczywiście, lemat dowodzimy przez indukcję ze względu na k, a przedstawimy tylko szkic dowodu drugiego kroku indukcyjnego. Załóżmy więc, że lemat zachodzi dla liczby k. Będziemy analizować walkę, podczas której ścinamy hydrze głowy z gromad mających najwyżej $k+1$ elementów.

Po pierwsze zauważmy, że ścięcie hydrze jakiejkolwiek głowy zgodnie z przyjętymi zasadami nie powoduje powstania na poziomie 2 nowej gromady istotnych głów o liczności $k+1$. Ścięcie głowy na poziomie 3 albo nie powoduje powstania nowych głów na poziomie 2, albo powoduje powstanie wielu głów, ale będą to tylko głowy zwykłe. Oznacza to, że podczas rozważanej walki z hydrą możemy ściąć jej istotną głowę z gromady $k+1$ elementowej najwyżej skończenie wiele razy, tyle razy, ile hydra miała takich gromad przed rozpoczęciem walki.

Jeżeli w pewnym momencie przestaniemy ścinać istotne głowy z gromad $k+1$ elementowych, to dalsza walka będzie prowadzona w sposób, o którym mowa w założeniu indukcyjnym. Tak prowadzone walki, zgodnie z założeniem indukcyjnym, trwają skończenie długo. To kończy dowód drugiego kroku indukcyjnego, a właściwie i całego lematu. □

Wniosek 1.8 *Każda walka z hydrą z głowami na poziomach 1, 2 i 3 trwa skończenie długo.*

Dowód. Przed walką z hydrą ustalamy liczność k największej gromady istotnych głów tej hydry na poziomie 2. Walkę z hydrą prowadzimy zgodnie zasadami opisanymi dla liczby k w poprzednim lemacie. Zgodnie z tym lematem walka będzie trwała skończenie długo. Z drugiej strony liczba k jest tak dobrana, że przyjęte zasady walki nie ograniczają nas w żadnen sposób. □

Analiza przedstawionego dowodu podpowiada jeszcze inne rozwiązanie zadania 2, zamieszczone w następnym rozdziale.

1.6 Wielkość hydry

Dalej zajmujemy się hydrami z głowami na trzech poziomach. Dla takich hydr ich wielkością będziemy nazywać następujący układ liczb:

$$(G_k^2, G_{k-1}^2, \ldots, G_1^2, g_l^3, g_{l-1}^3, \ldots, g_1^3, g_m^2, g_{m-1}^2, \ldots, g_1^2, g^1),$$

gdzie

– G_i^2 jest liczbą i-elementowych gromad istotnych głów na poziomie 2, a k jest (przynajmniej) licznością maksymalnej takiej gromady,

– g_i^3 jest liczbą i-elementowych gromad głów na poziomie 3, a l jest licznością maksymalnej takiej gromady,

– g_i^2 jest liczbą i-elementowych gromad zwykłych głów na poziomie 2, a m jest licznością maksymalnej takiej gromady,

– g^1 to liczba głów na poziomie 1.

Walcząc z konkretną hydrą liczby k, l i m możemy ustalić (mimo, że zmniejszają się w trakcie walki). W zbiorze możliwych wielkości hydr (dla ustalonych k, l i m) wprowadzamy porządek leksygraficzny wyznaczony przez zwykły porządek w zbiorze liczb naturalnych. Jest to dobry porządek. Przy takich ustaleniach powinien zachodzić

Lemat 1.9 *Hydra powstająca po ścięciu jednej głowy hydrze H ma wielkość mniejszą od wielkości hydry H.* $\square$

W ten sposób uzyskaliśmy chyba dość ładne rozwiązania zadania 2 dla małych hydr. Mam nadzieję, że daje się ono łatwo uogólnić na przypadek hydr większych.