

Egzamin z Rachunku Lambda

Zadania będą jakoś punktowane. Zakładam, że bardzo dobry student powinien rozwiązać zadania za około 75% punktów. 60% punktów powinno starczyć na ocenę bardzo dobrze, a 25% – na ocenę dostatecznie. Czas trwania egzaminu: 120 do 150 minut. 26 czerwca 2018

- Zad. 1.** 1) Pojęcie termu w λ -rachunku definiuje się na dwa sposoby. Przytocz obie definicje.
- 2) Przytocz definicję termu w postaci normalnej (termu, który jest w postaci normalnej, znajduje się w postaci normalnej).
- 3) Sformułuj twierdzenie Churcha-Rossera, a właściwie uzupełnij następujące zdanie: *Jeżeli $M =_{\beta} N$, to ..., gdzie M i N to λ -termy.*
- 4) Uzupełnij następujące zdanie: *Jeżeli λ -term M jest w postaci normalnej i $M \rightarrow_{\beta} N$, to ...* Podaj jego uzasadnienie.
- 5) Czy $c_1 =_{\beta} I$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozw. (lub uwagi dotyczące rozwiązania).

- 1) Pytanie było mało precyzyjne. Termy λ rachunku często definiuje się w zwykły sposób, jako wyrażenia z dwoma operacjami: aplikacją i abstrakcją. Wiadomo jednak, że ta definicja ma złe konsekwencje. Precyzyjniejsza definicja często korzysta z α -konwersji.
- Takie były moje oczekiwania. Można też było wspomnieć o termach de Bruijna.
- 2) Pisząc mało formalnie, term w postaci normalnej to taki, który nie zawiera redeksu, albo taki, którego nie można przekształcić wykonując jeden (istotny) krok β -redukcji.
- 3) Jeżeli $M =_{\beta} N$, to istnieje term P taki, że $M \rightarrow_{\beta} P$ i $N \rightarrow_{\beta} P$.
- 4) Jeżeli λ -term M jest w postaci normalnej i $M \rightarrow_{\beta} N$, to $M = N$ (lub dokładniej, $M =_{\alpha} N$).
- 5) Oczywiście termy c_1 oraz I nie są termami równymi w sensie β -konwersji. Gdyby były równe, to z twierdzenia Churcha-Rossera można byłoby je oba β zredukować do pewnego termu P . Wtedy z punktu 4) otrzymalibyśmy, że $c_1 =_{\alpha} P =_{\alpha} I$. Tak więc c_1 i I byłyby termami α konwertowalnymi i na przykład musiałyby mieć taką samą strukturę, a tak nie jest (w c_1 mamy dwie abstrakcje i aplikację, I zawiera tylko jedną abstrakcję).

Zad. 2. Krótko mówiąc, aby zdefiniować relację $\beta\eta$ -redukcji $\rightarrow_{\beta\eta}$ rozszerzamy definicję β -redukcji dopuszczając nowy sposób przekształceń $\lambda x. Mx \rightarrow M$. Dokładniej, relacja $\rightarrow_{\beta\eta}$ jest najmniejszą relacją zgodną z operacjami λ -rachunku spełniającą (z oczywistymi ograniczeniami)

$$(\lambda x. M)N \rightarrow_{\beta\eta} M[x := N] \quad \text{oraz} \quad \lambda x. Mx \rightarrow_{\beta\eta} M$$

(tę drugą regułę nazywamy η -redukcją, wymagamy, że $x \notin M$). Jak zwykle, relacja $\rightarrow_{\beta\eta}$ jest zwrotnym i przechodnim domknięciem relacji $\rightarrow_{\beta}$, zaś relacja $=_{\beta\eta}$ jest najmniejszą kongruencją zawierającą $\rightarrow_{\beta\eta}$. Dla $\beta\eta$ -redukcji, analogicznie, definiuje się także pojęcie termu w postaci normalnej oraz dowodzi się twierdzenie Churcha-Rossera.

- 1) Pokaż, że jeżeli term M jest abstrakcją i zmienna x nie jest wolna w M , to $\lambda x. Mx \rightarrow_{\beta} M$.
- 2) Udowodnij, że jeżeli $x \notin FV(MN)$ i $Mx =_{\beta\eta} Nx$, to $M =_{\beta\eta} N$.
- 3) Wywnioskuj z punktu 2), że $c_1 =_{\beta\eta} I$.
- 4) Termy c_1 i I – w przypadku $\beta\eta$ -redukcji – powinny mieć wspólny redukt. Znajdź go, a także, o ile istnieją, postacie normalne tych termów.
- 5) Wywnioskuj z twierdzenia Churcha-Rossera, że $\beta\eta$ -rachunek jest niesprzecznym i istotnym rozszerzeniem β -rachunku.

Rozw.

Zad. 3. Przyjmijmy, że $\omega = \lambda x. xx$, $A = \lambda y. \omega y$ oraz $M = AA$.

- 1) Zdefiniuj graf $G_\beta(X)$ (X to dowolny λ -term). Jest to raczej graf z wielokrotnymi krawędziami. Jaki jest stopień wyjściowy wierzchołka odpowiadającego M w grafie $G_\beta(M)$.
- 2) Narysuj graf $G_\beta(M)$. Zaznacz na rysunku ścieżkę redukcji normalnej termu M . Ustal także, czy term M ma postać normalną i zaznacz ją, jeżeli istnieje.

Rozw.

2)

$$\begin{array}{ccc}
 (\lambda y. (\lambda x. xx)y)(\lambda y. (\lambda x. xx)y) & \rightarrow & (\lambda y. (\lambda x. xx)y)(\lambda y. yy) \\
 \Downarrow \downarrow \Uparrow & & \downarrow \downarrow \\
 (\lambda y. yy)(\lambda y. (\lambda x. xx)y) & \rightarrow & (\lambda y. yy)(\lambda y. yy) \quad \hookrightarrow
 \end{array}$$

Zad. 4. Czy w λ -rachunku jest prawdziwa równość $(\lambda y. (\lambda x. M))N = \lambda x. ((\lambda y. M)N)$? Ewentualnie, w jakich przypadkach ta równość jest prawdziwa? Oczywiście, x i y to różne zmienne.

Rozw. Te termy oczywiście mogą się różnić, i można szukać różnicy uniemożliwiającej wykazanie równości, ale to może być trudne i niewiele z tego wynika.

Najpierw zauważmy, że czasem ta równość nie zachodzi. Tak jest na przykład dla $M = xy$ i $N = x$. Wtedy

$$(\lambda y. (\lambda x. M))N = (\lambda y. (\lambda x. xy))x =_\alpha (\lambda y. (\lambda z. zy))x = \lambda z. zx$$

oraz

$$\lambda x. ((\lambda y. M)N) = \lambda x. ((\lambda y. xy)x) = \lambda x. xx.$$

Tak więc znaleźliśmy postacie normalne obu termów, które okazały się różne. Stąd wynika, że w tym przypadku nie dowiedzimy równości rozważanych termów.

Z drugiej strony rozważane termy wydają się bardzo podobne. Mamy

$$(\lambda y. (\lambda x. M))N \rightarrow_\beta (\lambda x. M)[y := N] = \lambda x. M[y := N]$$

oraz

$$\lambda x. ((\lambda y. M)N) \rightarrow_\beta \lambda x. M[y := N].$$

Wygląda na to, że redukują się do tego samego termu. Poprawność tych redukcji wymaga jednak drobnych założeń: podstawialności N za y w termach $\lambda x. M$ i M odpowiednio. Przedstawione rachunki są poprawne, gdy y nie jest wolna w M (gdy nie mamy za co podstawiać), a także gdy x nie jest wolna w N (wtedy wykonanie redukcji może wymagać zastąpienia M jego odpowiednią wersją, taką samą w obu przypadkach).

Jak widać z podanego przykładu, w sytuacji, w której x jest wolna w N i y jest wolna w M , interesujące nas termy mogą być różne.

Zad. 5. 1) Wymień własności redukcji termów z kolorowymi redeksami. Jakie własności różnią tę redukcję i β -redukcję. Do czego się ona przydaje.

2) Ile razy trzeba wykonać pojedynczą β -redukcję, aby otrzymać postać normalną termu w sensie kolorowej redukcji? A ile razy można?

3) Przypuśćmy, że $M \rightarrow N$. Przyjmijmy, że λ -termy M' i N' otrzymujemy redukując odpowiednio w termach M i N najbardziej lewy (pierwszy) redeks. Pokaż, że $M' \rightarrow N'$. Wskazówka: oczywiście, w tym zadaniu przydatne są termy z kolorowymi redeksami. Trudno jednak pokolorować redeksy od razu, na początku. Raczej trzeba to robić stopniowo.

- 4) Przypuśćmy, że λI -term ma nieskończoną redukcję. Pokaż, że nie ma postaci normalnej. Wskazówka: wypełniamy termami tablicę indeksowaną liczbami naturalnymi. W pierwszym wierszu umieszczamy termy z nieskończonej redukcji. W kolumnach umieszczamy kolejne termy normalnej redukcji termu z pierwszego wiersza, do końca. Chciałoby się pokazać, że cała tablica zostanie wypełniona, ale przynajmniej pierwsza kolumna zostanie wypełniona. Wynika to z niewielkiego wzmocnienia poprzedniego punktu.

Rozw.

- 1) W λ -rachunku mamy trzy rodzaje termów: takie, których wszystkie redukcje są skończone (kończą się postacią normalną), które nie mają skończonych (i zakończonych, maksymalnych) redukcji, i w końcu takie, które mają zarówno skończone, jak i nieskończone redukcje.

W przypadku rachunku z kolorowymi redeksami mamy tylko termy pierwszego rodzaju. Każdy term ma jednoznacznie wyznaczoną postać normalną, bez kolorowych redeksów. W β -rachunku term ma tylko najwyżej jedną postać normalną (może nie mieć postaci normalnej). Co więcej, każda redukcja kolorowych redeksów jest skończona i kończy się postacią normalną. W β -rachunku niekoniecznie.

Przy okazji zauważmy, że w λI -rachunku nie ma termów trzeciego rodzaju.

Kolorowe redeksy bardzo przydają się przy dowodzeniu własności zwykłej β -redukcji. Pozwalają zagwarantować określony przebieg redukcji. Były wykorzystywane w dowodzie twierdzenia o standaryzacji, o normalizacji (redukcji lewostronnej), przy analizie redukcji quasi-normalnej.

- 2) Redukując term z kolorowymi redeksami do postaci normalnej możemy przekształcać redeksy kolejno, od prawej strony. Wtedy wykonamy tyle pojedynczych redukcji, ile w termie było kolorowych redeksów.

W pewnym momencie zostało wprowadzone pojęcie wagi termu i zostało wykazane przy pewnych założeniach, że wykonanie redukcji kolorowego redeksu powoduje zmniejszenie wagi termu. Termowi, w którym występuje n zmiennych, można nadać wagę $2^{n+1} - 1$. Stąd wynika, że redukując kolorowe redeksy w takim termie wykonamy najwyżej 2^{n+1} redukcji.

- 3) Przypuśćmy, że mamy taką sytuację:

$$\begin{array}{ccccccc} M & = & M_0 & \rightarrow & M_1 & \rightarrow & M_2 & \rightarrow \dots \rightarrow & M_n & = & N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M' & = & M'_0 & & M'_1 & & M'_2 & & M'_n & = & N' \end{array}$$

(strzałka w dół oznacza redukcję najbardziej lewego redeksu). Wystarczy, że skupimy uwagę na czterech termach takich, jak M_1 , M_2 , M'_1 i M'_2 . Pokażemy, że $M'_1 \twoheadrightarrow M'_2$. Są możliwe dwa przypadki. Jeżeli obie redukcje termu M_1 polegają na przykształceniu tego samego redeksu, to $M'_1 = M_2 \rightarrow M'_2$. Jeżeli M_1 jest redukowany na dwa różne sposoby, to kolorujemy oba przekształcane redeksy. Redukcja $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M'_2$ jest wtedy redukcją wszystkich kolorowych redeksów (do prawej) i M'_2 jest postacią normalną M_1 w sensie kolorowej redukcji. Możemy też w termie M_1 najpierw zredukować pierwszy (pokolorowany) redeks, a następnie wszystkie kolorowe redeksy termu M'_1 . W ten sposób otrzymamy postać normalną termu M_1 , czyli term M'_2 .

- 4) Postępujemy podobnie jak w pierwszej części zadania, ale zaczynamy od nieskończonej redukcji termu M i przekształcamy ją w inną nieskończoną redukcję:

$$\begin{array}{ccccccccccc} M & = & M_0 & \rightarrow & M_1 & \rightarrow & M_2 & \rightarrow \dots \rightarrow & M_n & \rightarrow \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ M'_0 & = & M'_0 & \twoheadrightarrow & M'_1 & \twoheadrightarrow & M'_2 & \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow & M'_n & \twoheadrightarrow \dots \end{array}$$

Gdyby udało się tę tablicę rozbudować w nieskończoność, to pierwsza kolumna tablicy byłaby lewostronną i nieskończoną redukcją termu M i świadczyłaby o braku postaci normalnej M .

Ten nowy wiersz z redukcją nie jest tak regularny, jak pierwszy i to z dwóch powodów. Przejścia między poszczególnymi kolumnami mogą wymagać wielu kroków, co zaburza wygląd tablicy,

ale nie jest specjalnie istotne. Może też zdarzyć się tak, że przejścia wymagają 0 kroków, a właściwie nie mogą zostać wykonane. Proszę przeanalizować co się będzie działo w przypadku termu $I((\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx))$.

Aby wypełnić potrzebną, nieskończoną tablicę, musimy wykorzystać założenie i dwie jego konsekwencje: redukując λI -term otrzymujemy w wyniku λI -term, a poza tym redukcja λI -termu z dwoma redeksami wymaga wykonania przynajmniej dwóch pojedynczych redukcji.

Ładne rozwiązanie można otrzymać dowodząc przez indukcję, że λI -term, który ma nieskończoną redukcję, dla każdego naturalnego n ma też nieskończoną redukcję, w której przynajmniej w n pierwszych krokach redukowane są najbardziej lewe redeksy.

Zad. 6. Przypomnijmy na razie oznaczenia i znane wzory: $F^0(M) = M$, $F^{n+1}(M) = F(F^n(M))$.

- 1) Pokaż, że $c_m(c_n x) = c_{mn} x$ dla wszystkich $m, n \in N$. Postaraj się nie korzystać z ekstensjonalności.
- 2) Niech $F = \lambda abx.ba(ax)$. Udowodnij, że $F c_m c_n = c_{m^{n+1}}$.
- 3) Znajdź najbardziej ogólny typ termu F . Odpowiedź uzasadnij.
- 4) Oznaczmy symbolem **nat** typ $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$ (literały Churcha są typu **nat**). Chcielibyśmy, aby term F był typu **nat** $\rightarrow$ **nat** $\rightarrow$ **nat**. Pokaż, że nie jest to możliwe, bez względu na to, co podstawimy za α w podanym typie, nie otrzymamy wyrażenia o którym można dowieść, że jest typem F .
- 5) Niech $G = \lambda ax.aa(ax)$ (G reprezentuje funkcję $g(n) = n^{n+1}$). Zbadaj, czy G ma typ i znajdź najogólniejszy typ tego termu, jeżeli istnieje.
- 6) Przyjmijmy, że **Nat** jest typem polimorficznym $\forall \alpha (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$. Pokaż (o termie G z adnotacjami) w polimorficznym systemie $\lambda 2$, że

$$\vdash \lambda a^{\mathbf{Nat}} \lambda \alpha \lambda x^{\alpha \rightarrow \alpha}. a(\alpha \rightarrow \alpha) a\alpha (a\alpha x) : \mathbf{Nat} \rightarrow \mathbf{Nat}.$$

Rozw.

- 1) Przekształcamy lewą stronę równości:

$$c_m(c_n x) = (\lambda fb.f^m(b))(c_n x) = \lambda b.(c_n x)^m(b).$$

To ostatnie wyrażenie wyliczymy na boku. Dokładniej, udowodnimy przez indukcję ze względu na m , że $(c_n x)^m(b) \rightarrow x^{mn}(b)$. Wzór jest oczywisty dla $m = 0$. Poza tym mamy

$$(c_n x)^{m+1}(b) = (c_n x)((c_n x)^m(b)) \rightarrow (c_n x)(x^{mn}(b)) \rightarrow (\lambda a.x^n(a))(x^{mn}(b)) \rightarrow x^n(x^{mn}(b)) = x^{(m+1)n}(b).$$

Kontynuując przekształcanie, z pomocniczego wzoru otrzymujemy, że

$$\lambda b.(c_n x)^m(b) \rightarrow \lambda b.x^{mn}(b) \leftarrow (\lambda fb.f^{mn}(b))x = c_{mn} x.$$

- 2) Jak wyżej, najpierw przez indukcję ze względu na n pokazujemy wzór pomocniczy

$$(c_m)^n(c_m x) = c_{m^{n+1}} x.$$

W rachunkach istotne są następujące przekształcenia:

$$(c_m)^{n+1}(c_m x) = c_m((c_m)^n(c_m x)) = c_m(c_{m^{n+1}} x) = c_{m^{n+2}} x$$

na mocy założenia indukcyjnego i wzoru z poprzedniego punktu.

I dalej

$$\begin{aligned} F c_m c_n &= (\lambda abx.ba(ax))c_m c_n = \lambda x.c_n c_m(c_m x) = \lambda x.((\lambda fy.f^n(y))c_m(c_m x)) = \\ &= \lambda x.(c_m)^n(c_m x) = \lambda x.c_{m^{n+1}} x = \lambda xa.x^{m^{n+1}}(a) = c_{m^{n+1}}. \end{aligned}$$

3) Znany jest algorytm wyliczający najogólniejszy typ termu. Algorytm ten wylicza najogólniejsze typy wszystkich podtermów zaczynając od najprostszych. Wyliczając typ złożonego termu rozwiązuje określone zadanie unifikacyjne i bierze najbardziej ogólne rozwiązanie. Jeżeli w ten sposób da się ustalić typ termu, to znaleziony typ powinien być najbardziej ogólnym.

Licząc (w sposób nieco uproszczony) typ termu $F = \lambda abx. ba(ax)$ zaczynamy od najprostszych podtermów a , b , x , następnie ustalamy typy podtermów ax , ba , $ba(ax)$ itd.

Przyjmijmy więc, że

$$a : \alpha, \quad b : \beta, \quad x : \gamma.$$

Aby term ax miał typ, typ α musi być typem funkcyjnym postaci $\alpha = \gamma \rightarrow \delta$. Wtedy ax będzie typu δ .

Aby term ba miał typ, typ β musi być typem funkcyjnym postaci $\beta = (\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow \kappa$. Wtedy ba będzie typu κ .

Aby term $ba(ax)$ miał typ, typ κ musi być typem funkcyjnym postaci $\kappa = \delta \rightarrow \xi$. Wtedy $ba(ax)$ będzie typu ξ .

Nietrudno zauważyć, że

$$\{a : \gamma \rightarrow \delta, \quad b : (\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow \delta \rightarrow \xi, \quad x : \gamma\} \vdash ba(ax) : \xi.$$

Wobec tego mamy

$$\vdash F : (\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow \delta \rightarrow \xi) \rightarrow \gamma \rightarrow \xi.$$

Co więcej, ze względu na sposób konstrukcji tego typu, powinien być on najbardziej ogólnym typem termu F .

4) Przypuśćmy, że po podstawieniu w typie $\mathbf{nat} \rightarrow \mathbf{nat} \rightarrow \mathbf{nat}$ za zmienną α typu α' otrzymujemy typ $\mathbf{nat}' \rightarrow \mathbf{nat}' \rightarrow \mathbf{nat}'$, który jest także typem termu F .

Wszystkie typy termu F otrzymujemy podstawiając w najbardziej ogólnym za zmienne β , γ , δ i ξ odpowiednie typy β' , γ' , δ' i ξ' . Powinna więc zachodzić równość następującej postaci

$$(\gamma' \rightarrow \delta') \rightarrow ((\gamma' \rightarrow \delta') \rightarrow \delta' \rightarrow \xi') \rightarrow \gamma' \rightarrow \xi' = \mathbf{nat}' \rightarrow \mathbf{nat}' \rightarrow \mathbf{nat}'.$$

Wynika z niej, że także

$$(\gamma' \rightarrow \delta') = \mathbf{nat}' = ((\gamma' \rightarrow \delta') \rightarrow \delta' \rightarrow \xi')$$

(pierwsze wyrażenie jest implikacją o poprzedniku $\gamma' \rightarrow \delta'$, a drugie – o poprzedniku $\mathbf{nat}'$, itd.). Nie jest to możliwe, gdyż żadne wyrażenie nie może być równe swojemu właściwemu podwyrażeniu.

5) Term G nie ma typu. Gdyby miał typ, to typy miałyby wszystkie podtermy G , a więc także podterm aa . Term aa nie ma typu z przyczyn wspomnianych w poprzednim punkcie.

6) Niech $\Gamma = \{a : \mathbf{Nat}, x : \alpha \rightarrow \alpha\}$.

$\Gamma \vdash a : \mathbf{Nat}$		
$\Gamma \vdash a(\alpha \rightarrow \alpha) : \mathbf{nat} \rightarrow \mathbf{nat}$	$\Gamma \vdash a\alpha : \mathbf{nat}$	$\Gamma \vdash x : \alpha \rightarrow \alpha$
$\Gamma \vdash a(\alpha \rightarrow \alpha)(a\alpha) : \mathbf{nat}$	$\Gamma \vdash (a\alpha)x : \alpha \rightarrow \alpha$	
$\Gamma \vdash a(\alpha \rightarrow \alpha)(a\alpha)((a\alpha)x) : \alpha \rightarrow \alpha$		
$a : \mathbf{Nat} \vdash \lambda x^{\alpha \rightarrow \alpha} a(\alpha \rightarrow \alpha)(a\alpha)((a\alpha)x) : \mathbf{nat}$		
$a : \mathbf{Nat} \vdash \lambda a \lambda x^{\alpha \rightarrow \alpha} a(\alpha \rightarrow \alpha)(a\alpha)((a\alpha)x) : \mathbf{Nat}$		
$\vdash \lambda a^{\mathbf{Nat}} \lambda a \lambda x^{\alpha \rightarrow \alpha} a(\alpha \rightarrow \alpha)(a\alpha)((a\alpha)x) : \mathbf{Nat} \rightarrow \mathbf{Nat}$		

Zad. 7. Przyjmijmy, że

$$P \equiv \lambda a. KI, \quad W \equiv \lambda x. xA_0A_1, \quad A_1 \equiv \lambda xwt. w(t(Sx))(Sx)wt$$

oraz

$$H_n \equiv W(Pc_n)c_nWP,$$

gdzie S oznacza term definiujący operację następnika, A_0 jest dowolnym termem (jego definicja nie odgrywa w zadaniu w żadnej roli), a P w istotnych przykładach powinien być zastąpiony innym termem o analogicznych własnościach.

- 1) Pokaż, że $H_n =_\beta H_{n+1}$ dla wszystkich liczb naturalnych n .
- 2) Uzasadnij, że term H_0 nie ma postaci normalnej.
- 3) Podaj przykład termów G_n takich, że $G_n =_\beta G_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mimo, że term G_0 ma postać normalną.

Rozw.

- 1) Zauważmy, że

$$\begin{aligned} H_n &= W(Pc_n)c_nWP = (\lambda x. xA_0A_1)(Pc_n)c_nWP \rightarrow (Pc_n)A_0A_1c_nWP \rightarrow KIA_0A_1c_nWP \rightarrow \\ &\rightarrow IA_1c_nWP \rightarrow A_1c_nWP = (\lambda xwt. w(t(Sx))(Sx)wt)c_nWP \rightarrow W(P(Sc_n))(Sc_n)WP \rightarrow \\ &\rightarrow W(Pc_{n+1})c_{n+1}WP = H_{n+1}. \end{aligned}$$

- 2) Redukcja $H_0 \rightarrow H_1 \rightarrow H_2 \dots$ jest quasi-normalna, gdyż w rachunkach z punktu 1) wszystkie przejścia z wyjątkiem ostatniego polegają na przekształceniu najbardziej lewego redeksu. Term, dla którego istnieje nieskończona redukcja quasi-normalna nie ma postaci normalnej.
- 3) Zadanie jest trochę źle sformułowane, ale chodziło w nim o taki przykład, który świadczyłby o tym, że analiza termu H_0 z punktu 2) jest ważna i rzeczywiście wymaga uzasadnienia.

Proponowałbym następujący:

$$fx = (Zx)c_0(f(Px)), \text{ a właściwie } F = \lambda fx. (Zx)c_0(f(Px))$$

gdzie Z sprawdza, czy x jest zerem, P jest termem reprezentującym odejmowanie jedynki. Tak więc f wyraża indukcyjną definicję funkcji stale równej 0. Niech Θ będzie kombinatorem punktu stałego Turinga. Mamy więc redukcję $\Theta F \rightarrow F(\Theta F)$. Jeżeli przyjmiemy, że $G_n = F^n(\Theta F)c_{13}$, to zarówno $G_n \rightarrow G_{n+1}$, jak i $G_n \rightarrow c_0$.

Zad. 8. Podaj term F spełniający równość $Fx = Gx(F(Fx))$. Oczywiście, pokaż, że wskazany przez Ciebie term spełnia tę równość. Dowód powinien być pełny, nie może korzystać z jakichkolwiek twierdzeń.

Zad. 9. Czy istnieje λ -term bez zmiennych wolnych, który jest typu $((((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$? Odpowiedź uzasadnij. To zadanie ma bardzo krótkie rozwiązanie.

Rozw. Rozwiązując takie zadanie możemy spotkać się z trzema sytuacjami.

Po pierwsze, dany typ rozumiany jako formuła może nie być tautologią (klasyczną). O tym łatwo można się przekonać. Łatwo też można dowieść, że typy są prawami logiki (klasycznej oraz intuicjonistycznej), a także tautologiami.

Jeżeli dany typ można dowieść w logice intuicjonistycznej, to najprościej to zadanie rozwiązujemy posługując się tzw. izomorfizmem Curry'ego-Howarda, z którego wynika w szczególności, że typami są wszystkie prawa intuicjonistycznego rachunku zdań. W tej sytuacji można rozwiązać zadanie dowodząc daną formułę w logice intuicjonistycznej. Nie powinno to być trudne, gdy skorzystamy z systemu dedukcji naturalnej.

Najtrudniej rozwiązać zadanie w trzecim przypadku, gdy dany typ jest klasyczną tautologią, która nie jest prawem logiki intuicjonistycznej.

Typ podany w treści zadania i rozumiany jako formuła nie jest tautologią.

Ciekawsze byłoby to samo zadanie dotyczące typu $((((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$.