Wykład 9.

9.1 Twierdzenie Herbranda

Niech Ψ będzie dowolną formułą. Będziemy badać, czy jest to tautologia. Nietrudno zauważyć, że Ψ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall\vec{y}\Psi$ jest tautologią. Możemy więc założyć, że w formule Ψ nie ma zmiennych wolnych. Zanegujmy tę formułę i sprowadźmy jej negację do koniunkcyjnej postaci normalnej. Przyjmijmy, że koniunkcyjną postacią normalną $\neg\Psi$ jest formuła Φ. Znajdźmy teraz postać skolemowską formuły Φ. Przyjmijmy, że $\Phi^s = \forall\vec{x}\varphi$, gdzie φ jest formułą bez kwantyfikatorów, w koniunkcyjnej postaci normalnej.

Lemat 9.1 *Niech Ψ będzie dowolną formułą bez zmiennych wolnych. Przyjmujemy wprowadzone wyżej oznaczenia. Następujące warunki są równoważne:*

1) *Ψ jest tautologią,*

2) *$\neg\neg\Psi$ jest tautologią,*

3) *$\neg\Psi$ jest formułą sprzeczną,*

4) *Φ jest formułą sprzeczną,*

5) *Φ^s jest formułą sprzeczną,*

6) *φ jest formułą sprzeczną.*

7) *φ nie jest spełniona w żadnym modelu Herbranda.*

Dowód. Prawie wszystkie stwierdzenia z tego lematu są oczywiste. Równoważność własności 4 i 5 wynika z wniosku 7.7. Równoważność własności 6 i 7 jest konsekwencją wniosku 3.4. □

Twierdzenie 9.2 *Niech Ψ będzie dowolną formułą bez zmiennych wolnych. Przyjmujemy oznaczenia wprowadzone na początku rozdziału. Formuła Ψ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją podstawienia stałe $\theta_1, \ldots, \theta_m$ takie, że koniunkcja $\varphi\theta_1 \wedge \ldots \wedge \varphi\theta_m$ nie jest spełniona w żadnym modelu Herbranda.*

Dowód. Jest to wniosek z poprzedniego lematu oraz z lematu 8.6. □

Twierdzenie to nie jest łatwo wykorzystać do badania, czy dana formuła jest tautologią. Nie jest w nim podana żadna metoda szukania podstawień $\theta_1, \ldots, \theta_m$ wspomnianych w sformułowaniu twierdzenia (jakaś metoda wynika z dowodu twierdzenia). Sens tego twierdzenia polega sprowadzeniu badania, czy dana formuła (rachunku kwantyfikatorów) jest tautologią, do znanej metody zero-jedynkowej, a dokładniej, do badania, czy pewna forma zdaniowa jest sprzeczna. Wynika to z następującego lematu:

Lemat 9.3 *Niech ψ będzie formuła bez zmiennych i bez kwantyfikatorów. Formułom atomowym (a nie wystąpieniom tych formuł) występującym w ψ przyporządkowujemy wzajemnie jednoznacznie zmienne zdaniowe. Przypuśćmy, że zastępując w formule ψ formuły atomowe przyporządkowanymi im zmiennymi zdaniowymi otrzymujemy formę Γ. Formuła ψ nie jest spełniona w żadnym modelu Herbranda wtedy i tylko wtedy, gdy wartość logiczna formy Γ przy dowolnym wartościowaniu jest równa 0.*

Przykład 9.4 Pokażemy dla przykładu, że formuła

$$\Psi \;=\; \exists x\; \forall y\; p(x,y) \to \forall y\; \exists x\; p(x,y)$$

jest tautologią. Jeżeli zanegujemy tę formułę i negację sprowadzimy w pewien sposób do postaci normalnej, to możemy otrzymać formułę

$$\Phi \;=\; \exists x\; \forall y\; \exists z\; \forall t\; (p(x,y) \wedge \neg p(z,t))$$

(postać normalna nie jest wyznaczona jednoznacznie, ważne jest, że $\neg\Psi \leftrightarrow \Phi$ jest tautologią i Φ jest formułą w koniunkcyjnej postaci normalnej). Skolemowską postacią Φ jest formuła

$$\Phi^s \;=\; \forall x\; \forall t\; (p(x,c) \wedge \neg p(f(x),t)).$$

Wobec tego przyjmujemy, że

$$\varphi \;=\; p(x,c) \wedge \neg p(f(x),t).$$

Formuły Φ^s i φ są równoważne w tym sensie, że w dowolnej strukturze spełnianie jednej z nich jest równoważne spełnianiu drugiej. Zgodnie z lematem 9.1, formuła Ψ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy formuła Φ^s jest sprzeczna. O tym ostatnim fakcie przekonamy się bez trudu, jeżeli zauważymy, że Φ^s implikuje, że $\forall x\; p(x,c)$ oraz $\forall x\; \forall t\; \neg p(f(x),t)$, a więc także $p(f(c),c)$ oraz $\neg p(f(c),c)$.

Ustawmy bazę Herbranda w ciąg przyjmując, że pierwszymi wyrazami tego ciągu są kolejno $p(c,c)$, $p(f(c),c)$ oraz $p(f(f(c)),c)$. Będziemy rozważać w drzewie zdefiniowanym w rozdziale 8.2 węzły w takie, że $\mathcal{B}(w) = \{p(c,c), p(f(c),c), p(f(f(c)),c)\}$. Wszystkie takie węzły są odrzucające. Aby się o tym przekonać przyjmijmy, że $\theta_1(x) = c$ i $\theta_1(t) = c$ oraz $\theta_2(x) = f(c)$ i $\theta_2(t) = c$. Wobec tego

$$\varphi\theta_1 \;=\; p(c,c) \wedge \neg p(f(c),c) \;\text{ oraz }\; \varphi\theta_2 \;=\; p(f(c),c) \wedge \neg p(f(f(c)),c).$$

Rozważane węzły w dzielą się na takie, że w strukturze $\mathcal{H}_{\mathcal{I}(w)}$ jedna z formuł $p(c,c)$ lub $\neg p(f(c),c)$ jest fałszywa, oraz takie, że obie te formuły są prawdziwe. W pierwszym przypadku formuła $\varphi\theta_1$ jest fałszywa, w drugim – fałszywa jest formuła $\varphi\theta_2$.

Śledząc dowód twierdzenia 9.2 można się przekonać, że formuła Ψ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\varphi\theta_1 \wedge \varphi\theta_2 \;=\; p(c,c) \wedge \neg p(f(c),c) \wedge p(f(c),c) \wedge \neg p(f(f(c)),c)$$

jest sprzeczna. Oczywiście, podana formuła jest sprzeczna. W sposób systematyczny można się o tym przekonać badając np. formę zdaniową

$$\Gamma \;=\; q \wedge r \wedge \neg r \wedge s$$

metodą zerojedynkową (Γ jest fałszywa przy każdym wartościowaniu). Można też zastosować metodę rezolucji: ze zbioru $\{p(c,c), \neg p(f(c),c), p(f(c),c), \neg p(f(f(c)),c)\}$ łatwo wyprowadzić klauzulę pustą stosując regułę rezolucji do drugiej i trzeciej klauzuli. Przedstawione metody mają wadę polegającą na tym, że aby je zastosować trzeba znaleźć odpowiednie podstawienia θ_1 i θ_2. Spróbujemy tę wadę usunąć. Zauważmy, że

$$\varphi_1\theta \wedge \varphi_2\theta \;=\; \varphi_1\theta \wedge \varphi_2\theta$$

dla $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \varphi(y/x, z/t)$ oraz podstawienia θ takiego, że $\theta(x) = \theta(t) = \theta(z) = c$ oraz $\theta(y) = f(c)$. Tak więc badanie sprzeczności formuły $\varphi\theta_1 \wedge \varphi\theta_2$ można zastąpić badaniem sprzeczności koniunkcji formuł otrzymywanych przez stosowanie θ do kilku wariantów φ. Pozwala to, podobnie jak w dowodzie lematu 5.2, przekształcić wyprowadzenie klauzuli pustej z członów formuły $\varphi_1\theta \wedge \varphi_2\theta$ w wyprowadzenie klauzuli pustej z klauzul-członów formuły φ, czyli ze zbioru $\{p(x,c), \neg p(f(x),t)\}$. Aby to zrobić w rozważanym przypadku bierzemy klauzulę $p(y,c)$, czyli pewien wariant klauzuli $p(x,c)$, oraz klazulę $\neg p(f(x),t)$. Po zastosowaniu do tych klauzul reguły rezolucji otrzymujemy klauzulę pustą. $\square$

Lemat 9.5 *Niech Γ będzie formą zdaniową w koniunkcyjnej postaci normalnej. Jeżeli Γ jest sprzeczna, to istnieje wyprowadzenie klauzuli pustej z klauzul-członów formy Γ.*

Dowód. Niech A_0 będzie zbiorem członów formy Γ. Z założenia wynika, że ten zbiór jest sprzeczny. Będziemy indukcyjnie konstruować ciąg sprzecznych zbiorów klauzul.

Przypuśćmy, że A_i jest sprzecznym zbiorem klauzul i załóżmy, że występuje w nim jakaś zmienna zdaniowa (zawiera nie tylko klauzulę pustą). Możemy założyć, że nie występują w nim klauzule postaci $p \vee \neg p \vee \ldots$. Jeżeli każda zmienna występująca w tym zbiorze występuje tylko jako zmienna zanegowana, albo tylko jako zmienna niezanegowana, to wartościowanie, które zmiennym zanegowanym przypisuje wartość 0, a pozostałym – wartość 1 spełnia wszystkie klauzule z tego zbioru. W zbiorze sprzecznym pewna zmienna zdaniowa występuje więc w postaci zanegowanej i w innej klauzuli w postaci niezanegowanej. Niech p będzie taką zmienną w zbiorze A_i. Przyjmijmy, że A_{i+1} jest zbiorem wniosków z reguły rezolucji zastosowanej do par klauzul ze zbioru A_i tak, aby usunąc z niej zmienną p. Nietrudno dowieść, że zbiór A_{i+1} jest sprzeczny. Zdefiniowaliśmy więc pewien ciąg sprzecznych zbiorów klauzul. W kolejnych zbiorach tego ciągu występuje coraz mniej zmiennych. Jest więc to ciąg skończony i musi się kończyć zbiorem zawierającym jedynie klauzulę pustą.

Aby zbudować wyprowadzenia klauzuli pustej ze zbioru A_0 wystarczy ustawić w ciągi wyrazy wszystkich zbiorów A_i i utworzyć konkatenację tych ciągów w kolejności wyznaczonej przez indeksy. $\square$

Twierdzenie 9.6 (Herbranda) *Niech Ψ będzie dowolną formułą bez zmiennych wolnych. Przyjmujemy oznaczenia wprowadzone na początku rozdziału. Formuła Ψ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wyprowadzenie (stosujące ogólną regułę rezolucji) z członów formuły φ klauzuli pustej.*

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że z członów formuły φ można wyprowadzić klauzulę pustą. Z lematu 2.2 wynika, że jeżeli w pewnej strukturze $\mathcal{A}$ jest spełniona formuła φ, to także są spełnione wszystkie klauzule dowolnego wyprowadzenia ze zbioru członów φ. Wymaga to tylko zauważenia, że jeżeli w $\mathcal{A}$ spełniona jest formuła Φ, to także w tej strukture są spełnione formuły $\Phi\theta$ (patrz lemat 2.1). Tak więc, jeżeli z formuły φ da się wyprowadzić klauzulę pustą, to klauzula pusta powinna być spełniona w każdej strukturze spełniającej φ. Wobec tego formuła φ jest sprzeczna. Teraz z lematu 9.1 wynika, że formuła Ψ jest tautologią.

Załóżmy więc, że Ψ jest tautologią. Z twierdzenia 9.2 wynika istnienie podstawień $\theta_1, \ldots, \theta_m$ takich, że formuła nie jest spełniona w żadnym modelu Herbranda. Z lematu 9.3 wynika, że formułę tę możemy uważać za sprzeczną formę zdaniową. Formule tej możemy nadać postać $\varphi_1\theta \wedge \ldots \wedge \varphi_m\theta$ dla pewnych wariantów $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ formuły φ i dla pewnego podstawienia θ. Lemat 9.5 implikuje, że z klauzul będących członami $\varphi_1\theta \wedge \ldots \wedge \varphi_m\theta$ można wyprowadzić klauzulę pustą. Rozumowanie podobne do zastosowanego w dowodzie lematu o podstawianiu pozwala stwierdzić, że klauzulę pustą można wyprowadzić także z członów formuły $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$, a ponieważ formuły φ_i są wariantami φ, więc klauzulę pustą można wyprowadzić także z członów formuły φ. $\square$