Wykład 8.

8.1 Lemat Königa

Lemat 8.1 (Königa) *Przypuśćmy, że mamy drzewo, w którym każdy węzeł ma skończenie wiele bezpośrednich potomków, oraz w którym istnieją dowolnie długie gałęzie. Takie drzewo ma także gałąź nieskończoną.*

Dowód. Będziemy definiować gałąź nieskończoną wskazując kolejne węzły należące do tej gałęzi. Przez każdy węzeł tej gałęzi będą przechodzić dowolnie długie gałęzie. Oczywiście do definiowanej gałęzi należy korzeń drzewa. Jest też oczywiste, że korzeń ma podaną własność.

Przypuśćmy, że mamy węzeł w, przez który przechodzą dowolnie długie gałęzie. Taki węzeł musi mieć potomka, przez który również przechodzą dowolnie długie gałęzie. W przeciwnym przez każdego z bezpośrednich potomków $w_1, \ldots, w_n$ węzła w przechodzą jedynie gałęzie o ograniczonej długości. Przyjmijmy, że przez w_i przechodzą gałęzie o długości $\leqslant m_i$. Ponieważ węzeł w ma skończenie wiele potomków i każda dostatecznie długa gałąź przechodząca przez w przechodzi także przez jednego z potomków w, więc długości gałęzi przechodzących przez w można ograniczyć przez $\max\{m_i : i = 1, \ldots, n\}$, a to przeczy założeniu.

Przypuśćmy, że do definiowanej, nieskończonej gałęzi zaliczyliśmy węzeł w i przez ten węzeł przechodzą dowolnie długie gałęzie. Kolejnym węzłem definiowanej gałęzi będzie ten z potomków w, przez który przechodzą dowolnie długie gałęzie. $\Box$

8.2 Spełnianie w modelach Herbranda

Niech $\mathcal{B}$ oznacza bazę Herbranda, czyli zbiór wszystkich stałych formuł atomowych. Zbiór $\mathcal{B}$ jest przeliczalny. Ustawmy jego elementy w ciąg wzajemnie jednoznaczny. Niech więc

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, \ldots\}.$$

Będziemy rozważać pełne, nieskończone drzewo binarne. Z każdym węzłem w tego drzewa zwiążemy dwa zbiory $\mathcal{B}(w)$ oraz $\mathcal{I}(w)$. Dla korzenia rozważanego drzewa te dwa zbiory są puste. Zbiór $\mathcal{B}(w)$ będzie składać się z pewnej liczby początkowych wyrazów ciągu $B_1, B_2, B_3, \ldots$, zbiór $\mathcal{I}(w)$ będzie podzbiorem $\mathcal{B}(w)$. Przypuśćmy, że dla węzła w te zbiory są zdefiniowane i v jest bezpośrednim potomkiem w. Wtedy

$$\mathcal{B}(v) = \mathcal{B}(w) \cup \{B_n\},$$

gdzie B_n jest pierwszym wyrazem ciągu $B_1, B_2, B_3, \ldots$, który nie należy do $\mathcal{B}(w)$, oraz

$$\mathcal{I}(v) = \begin{cases} \mathcal{I}w \cup \{B_n\} & \text{jeżeli } v \text{ jest lewym potomkiem } w, \\ \mathcal{I}(w) & \text{jeżeli } v \text{ jest prawym potomkiem } w. \end{cases}$$

W przedstawionej konstrukcji każdy wezeł możemy interpretować jako częściową informację o tym, które ze stałych formuł atomowych są prawdziwe. Dokładniej, z węzłem w jest związana informacja, że o formułach ze zbioru $\mathcal{B} \backslash \mathcal{B}(w)$ jeszcze nie wiemy, czy są prawdziwe lub fałszywe, a prawdziwość formuł ze zbioru $\mathcal{B}(w)$ już została rozstrzygnięta w następujący sposób: formuły należące do $\mathcal{I}(w)$ zostały uznane za prawdziwe, a formuły ze zbioru $\mathcal{B}(w) \setminus \mathcal{I}(w)$ – za fałszywe.

Zauważmy, że jeżeli v jest potomkiem w, to $\mathcal{I}(w) \subseteq \mathcal{I}(v)$.

Niech $w_1, w_2, w_3, \ldots$ będzie maksymalną gałęzią w rozważanym drzewie. Przyjmijmy, że

$$\mathcal{I}^*(w_1, w_2, w_3, \ldots) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{I}(w_i).$$

W ten sposób każdej maksymalnej gałęzi przyporządkowaliśmy pewien podzbiór bazy Herbranda. Nietrudno zauważyć, że funkcja $\mathcal{I}^*$ przekształca zbiór wszystkich maksymalnych gałęzi wzajemnie jednoznacznie na zbiór wszystkich podzbiorów bazy Herbranda. Zauważmy także, że podzbiory bazy Herbranda można utożsamiać z modelami Herbranda.

Niech φ będzie ustaloną formułą, w której nie występują kwantyfikatory. Węzeł w nazywamy odrzucającym, jeżeli istnieje podstawienie θ, które zmiennym występującym w φ przyporządkowuje termy stałe, takie że

1) jeżeli γ jest formułą atomową występującą w $\varphi\theta$, to $\gamma \in \mathcal{B}(w)$,

2) formuła $\varphi\theta$ jest fałszywa w strukturze $\mathcal{H}_{\mathcal{I}(w)}$.

Niech Γ będzie formą zdaniową zbudowaną ze zmiennych zdaniowych $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Niech $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ będą stałymi formułami atomowymi. Wtedy

Lemat 8.2 *Jeżeli $\mathcal{A}$ jest dowolną strukturą, formuła φ powstaje z formy zdaniowej Γ przez zastąpienie zmiennych zdaniowych $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ odpowiednio stałymi formułami atomowymi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ oraz h jest wartościowaniem zmiennych zdaniowych takim, że*

$$h(\gamma_i) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi_i$$

dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, to wartość logiczna formy Γ przy wartościowaniu h jest równa 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A} \models \varphi$.

Lemat 8.3 *Niech φ będzie formułą bez zmiennych i bez kwantyfikatorów. Przypuśćmy, że w jest węzłem takim, że formuły atomowe występujące w φ należą do $\mathcal{B}(w)$, a I jest podzbiorem bazy Herbranda zawierającym $\mathcal{I}(w)$ i rozłącznym z $\mathcal{B}(w) \setminus \mathcal{I}(w)$. Wtedy warunki $\mathcal{H}_I \models \varphi$ oraz $\mathcal{H}_{\mathcal{I}(w)} \models \varphi$ są równoważne.*

Dowód. Każda z formuł atomowych występujących w φ jest albo prawdziwa w obydwu modelach $\mathcal{H}_{\mathcal{I}(w)}$ oraz $\mathcal{H}_{\mathcal{I}(w)}$, albo jest w tych dwóch modelach fałszywa. □

Lemat 8.4 *Niech φ będzie formułą bez kwantyfikatorów, a I – podzbiorem bazy Herbranda. Formuła φ nie jest spełniona w $\mathcal{H}_I$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odrzucający wezeł w taki, że $\mathcal{B}(w) \subseteq I$ oraz $I \cap (\mathcal{B}(w) \setminus \mathcal{I}(w)) = \emptyset$.*

Dowód. Jeżeli $\mathcal{H}_I \not\models \varphi$, to istnieje wartościowanie zmiennych h takie, że $\mathcal{H}_I \models \neg\varphi[h]$. Weźmy podstawienie θ, które zmiennej x występującej w φ przyporządkowuje term $h(x)$. Jest oczywiste, że $\varphi\theta$ jest formułą bez zmiennych i bez kwantyfikatorów. Z własności modeli Herbranda wynika, że $\mathcal{H}_I \models \neg\varphi\theta$. Zauważmy, że także zachodzi implikacja odwrotna, a więc jeżeli $\mathcal{H}_I \models \neg\varphi\theta$ dla pewnego podstawienia θ, to φ nie jest spełniona w $\mathcal{H}_I$.

W formule $\varphi\theta$ występuje skończenie wiele formuł atomowych. Przypuśćmy, że wszystkie te formuły znajdują się wśród $B_1, \ldots, B_n$. Niech $I' = \{B_i \in I : i = 1, \ldots, n\}$. Oczywiście $I' \subseteq I$ oraz $I \cap (\{B_1, \ldots, B_n\} \setminus I') = \emptyset$. Weźmy węzeł w taki, że $\mathcal{B}(w) = \{B_1, \ldots, B_n\}$ oraz $\mathcal{I}(w) = I'$. Z lematu 8.3 wynika, że w spełnia drugi warunek z definicji węzła odrzucającego. Spełnianie pierwszego warunku jest oczywiste.

Załóżmy teraz, że istnieje węzeł odrzucający w spełniający założenia podane w tezie lematu. Z lematu 8.3 otrzymujemy, że $\mathcal{H}_I \models \neg\varphi\theta$. Z uwagi z początku dowodu otrzymujemy, że φ nie jest spełniona w $\mathcal{H}_I$. □

Zauważmy, że potomek węzłą odrzucającego jest węzłem odrzucający. Stąd wynika, te węzły rozważanego drzewa binarnego, które nie są odrzucające (dla ustalonej formuły φ), tworzą drzewo binarne.

Wniosek 8.5 *Niech φ będzie formułą bez kwantyfikatorów. Jeżeli drzewo złożone z węzłów, które nie są odrzucające ma dowolnie długie gałęzie, to formuła φ jest spełniona w pewnym modelu Herbranda.*

Dowód. Jest to wniosek z poprzedniego lematu i lematu Königa. □

Lemat 8.6 *Niech φ będzie formułą bez kwantyfikatorów. Jeżeli φ nie jest spełniona w żadnym modelu Herbranda, to istnieją podstawienia stałe $\theta_1, \ldots, \theta_m$ takie, że koniunkcja $\varphi\theta_1 \wedge \ldots \wedge \varphi\theta_m$ nie jest spełniona w żadnym modelu Herbranda.*

Dowód. Z poprzedniego wniosku otrzymujemy, że drzewo złożone z węzłów, które nie są odrzucające ma gałęzie o długości $< n$ dla pewnego n. Wobec tego węzły znajdujące się w pełnym drzewie binarnym na wysokości n, a więc węzły w takie, że $\mathcal{B}(w) = \{B_1, \ldots, B_n\}$, są węzłami odrzucającymi. Przypuśćmy, że jest m takich węzłów $w_1, \ldots, w_m$. Z definicji węzła odrzucającego, dla każdego z nich istnieje postawienie θ_i takie, że $\mathcal{H}_{\mathcal{I}(w_i)} \models \neg\varphi\theta_i$. Pokażemy, że $\varphi\theta_1 \wedge \ldots \wedge \varphi\theta_m$ nie jest spełniona w żadnym modelu Herbranda.

Weźmy model Herbranda $\mathcal{H}_I$. Niech $I' = \{B_i \in I : i = 1, \ldots, n\}$. Istnieje węzeł w taki, że $\mathcal{B}(w) = \{B_1, \ldots, B_n\}$ oraz $\mathcal{I}(w) = I'$. Oczywiście, w jest węzłem w_k dla pewnego k. Lemat 8.3 implikuje, że spełnianie $\varphi\theta_k$ w modelach $\mathcal{H}_{\mathcal{I}(w_k)}$ oraz $\mathcal{H}_I$ jest równoważne. Wynika stąd, że $\varphi\theta_k$ nie jest spełniona w modelu $\mathcal{H}_I$. Tym bardziej w tym modelu nie jest spełniona koniunkcja $\varphi\theta_1 \wedge \ldots \wedge \varphi\theta_m$. □