Wykład 7.

7.1 Skolemizacja

Dowolna formuła jest równoważna formule w koniunkcyjnej postaci normalnej, a więc formule będącą wieloczłonową koniunkcją poprzedzoną blokiem kwantyfikatorów, z członami będącymi wieloczłonowymi alternatywami formuł atomowych i negacji formuł atomowych. Dodatkowo będziemy zakładać, że w formułach w koniunkcyjnej postaci normalnej nie ma dwóch kwantyfikatorów wiążących tę samą zmienną.

Przypuśćmy, że φ jest formułą w koniunkcyjnej postaci normalnej. Przez indukcję ze względu na liczbę kwantyfikatorów egzystencjalnych zdefiniujemy formułę φ^s. Przyjmijmy, że

$$\varphi^s = \begin{cases} \varphi & \text{jeżeli w } \varphi \text{ nie ma kwatyfikatorów egzystencjalnych,} \\ (\psi(c/y))^s & \text{jeżeli } \varphi = \exists y \psi, \\ (\forall \vec{x} \psi(f(\vec{x})/y))^s & \text{jeżeli } \varphi = \forall \vec{x} \exists y \psi, \end{cases} .$$

gdzie c i f są nową stałą i nowym symbolem funkcyjnym, a więc symbolami nie należącymi do języka, w którym jest zapisana formuła φ. Formułę φ^s będziemy nazywać postacią skolemowską φ. Nietrudno zauważyć, że φ^s jest formułą w koniunkcyjnej postaci normalnej, nie zawierającą kwantyfikatorów egzystencjalnych, poprzedzoną blokiem kwantyfikatorów ogólnych wiążących różne zmienne.

Lemat 7.1 *Przypuśćmy, że dane są formuła φ, struktura $\mathcal{A}$, wartościowanie h w strukturze $\mathcal{A}$, zmienna x i term s. Niech h' będzie wartościowaniem takim, że $h'(y) = h(y)$ dla wszystkich $y \neq x$ oraz $h'(x) = s[h]$. Wtedy dla dowolnego termu t*

$$t(s/x)[h] = t[h'],$$

a jeżeli zmienne z termu s nie są związane w φ, to także

$$\mathcal{A} \models \varphi(s/x)[h] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathcal{A} \models \varphi[h'].$$

Dowód. Lemat ten dowodzimy przez oczywistą indukcję strukturalną odpowiednio ze względu na budowę termu lub formuły. □

Wniosek 7.2 *Jeżeli formuła $\forall \vec{x} \exists y \psi$ ma koniunkcyjną postać normalną oraz $\mathcal{A} \models \forall \vec{x} \psi(f(\vec{x})/y)[h]$, to $\mathcal{A} \models \forall \vec{x} \exists y \psi[h]$, a także prawdziwa jest analogiczna własność dla formuł zaczynających się kwantyfikatorem szczegółowym.*

Dowód. Wniosek ten wynika z poprzedniego i z definicji pojęcia spełniania. □

Wniosek 7.3 *Przypuśćmy, że φ ma koniunkcyjną postać normalną. Wtedy jeżeli $\mathcal{A} \models \varphi^s[h]$, to $\mathcal{A} \models \varphi[h]$, a także jeżeli $\mathcal{A} \models \varphi^s$, to $\mathcal{A} \models \varphi$.*

Dowód. Wniosek ten dowodzimy przez indukcję ze względu na liczbę kwantyfikatorów egzystencjalnych w formule φ korzystając z poprzedniego wniosku. □

Lemat 7.4 *Przypuśćmy, że $\forall\vec{x}\exists y\psi$ jest formułą bez zmiennych wolnych oraz $\mathcal{A} \models \forall\vec{x}\exists y\psi$. Wtedy istnieje funkcja F taka, że w strukturze $(\mathcal{A}, F)$ powstającej ze struktury $\mathcal{A}$ przez rozszerzenie jej o funkcję F i przyjęcie, że F jest interpretacja symbolu f spełniona jest formuła $\forall\vec{x}\psi(f(\vec{x})/y)$, a więc $(\mathcal{A}, F) \models \forall\vec{x}\psi(f(\vec{x})/y)$.*

Dowód. Niech $a_1, \ldots, a_n$ będą dowolnie ustalonymi elementami uniwersum struktury $\mathcal{A}$. Będziemy rozważać wartościowania H, które zmiennym x_i przyporządkowują elementy a_i dla $i = 1, \ldots, n$. Nietrudno zauważyć, że warunek $\mathcal{A} \models \forall\vec{x}\exists y\psi$ implikuje, że pewne takie wartościowanie (z odpowiednio dobraną wartością $H(y)$) spełnia warunek $\mathcal{A} \models \psi[H]$.

Funkcję F definiujemy tak, aby dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n$ z uniwersum struktury $\mathcal{A}$, przy wartościowaniu H, które dla $i = 1, \ldots, n$ zmiennym x_i przyporządkowuje a_i oraz zmiennej y przyporządkowuje $F(a_1, \ldots, a_n)$ (a dla pozostałych zmiennych jest zdefiniowane jakkolwiek), w strukturze $\mathcal{A}$ spełniona jest formuła ψ, a więc $\mathcal{A} \models \psi[H]$. Możliwość zdefiniowania funkcji F w taki sposób wynika między innymi stąd, że to, czy formuła jest spełniona przy pewnym wartościowaniu nie zależy od wartości przyporządkowywanych przez to wartościowanie zmiennym, które albo nie występują w tej formule, albo występują w niej jedynie jako zmienne związane.

Aby dowieść tezę, weźmy dowolne wartościowanie h w strukturze $\mathcal{A}$. Korzystając z definicji spełniania formuł zaczynających się kwantyfikatorem ogólnym, dowód zostanie zakończony jeżeli zostanie wykazane, że $(\mathcal{A}, F) \models \psi(f(\vec{x})/y)[h]$. Niech a_i oznacza $h(x_i)$.

Będziemy rozważać wartościowanie h' zdefiniowane tak, jak zostało podane w lemacie 7.1, a więc takie, że $h'(z) = h(z)$ dla zmiennych $z \neq y$ oraz $h'(y) = f(\vec{x})[h]$. Zauważmy, że wartościowanie h' jest jednym z wartościowań H, o których jest mowa w akapicie, w którym została zdefiniowana funkcja F. Wobec tego $\mathcal{A} \models \psi[h']$. Dodanie interpretacji nowych symboli nie ma wpływu na spełnianie formuł, w których te symbole nie występują. Tak więc $(\mathcal{A}, F) \models \psi[h']$. Jeżeli teraz skorzystamy z lematu 7.1 dla struktury $(\mathcal{A}, F)$, formuły ψ i termu $f(\vec{x})$, to otrzymamy, że $(\mathcal{A}, F) \models \psi(f(\vec{x})/y)[h]$, i tym samym dowód zostanie zakończony.

Zauważmy także, że można dowieść lemat analogiczny do poprzedniego, dotyczący formuł zaczynających się kwantyfikatorem egzystencjalnym. $\Box$

Wniosek 7.5 *Jeżeli φ jest formułą w koniunkcyjnej postaci normalnej, bez zmiennych wolnych, spełnioną w strukturze $\mathcal{A}$, to formuła φ^s jest spełniona w pewnej strukturze powstającej z $\mathcal{A}$ przez dodanie interpretacji symboli występujących w φ^s i nie występujących w φ.*

Wniosek 7.6 *Formuła φ w koniunkcyjnej postaci normalnej i bez zmiennych wolnych jest spełniona w pewnej strukturze wtedy i tylko wtedy, gdy formuła φ^s jest spełniona w pewnej strukturze.*

Dowód. Jedna z implikacji wynika z wniosku 7.3, druga – z wniosku 7.5. $\Box$

Wniosek 7.7 *Formuła φ w koniunkcyjnej postaci normalnej i bez zmiennych wolnych jest sprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy formuła φ^s jest sprzeczna.* $\Box$