Wykład 5.

5.1 Lemat o podstawieniu

Lemat 5.1 *Przypuśćmy, że mamy dane dwie formuły A i B, unifikator tych formuł θ i skończony zbiór zmiennych X. Wtedy istnieją najogólniejszy unifikator θ' formuł A i B oraz podstawienie γ takie, że formuły atomowe postaci $C\theta'$ nie zawierają zmiennych z X, $\theta = \theta'\gamma$ oraz $x\gamma = x$ dla dowolnej zmiennej $x \in X$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ma n elementów i niech $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ będzie n elementowym zbiorem rozłącznym z X. Będziemy posługiwać się podstawieniami $\delta = \{x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n\}$ oraz $\eta = \{y_1/x_1, \ldots, y_n/x_n\}$. Zauważmy, że oba złożenia tych podstawień są podstawieniami identycznościowymi i w formułach atomowych postaci $C\delta$ nie występują zmienne ze zbioru X.

Formuły A i B są unifikowalne. Weźmy dowolny najogólniejszy unifikator tych formuł i oznaczmy go symbolem θ''. Nietrudno zauważyć, że $\theta' = \theta''\delta$ też jest najogólniejszym unifikatorem A i B. Dowolny unifikator tych formuł daje się przedstawić w postaci $\theta''\gamma'$, a więc także daje się przedstawić w postaci $(\theta''\delta)(\eta\gamma')$. Oczywiście, w formułach atomowych postaci $C\theta' = C\theta''\delta$ nie występują zmienne ze zbioru X.

Przedstawmy unifikator θ w postaci $\theta'\gamma'$. Przyjmijmy, że γ jest podstawieniem, które jest obcięciem γ' (funkcji określonej na pewnym, skończonym zbiorze zmiennych) do dopełnienia zbioru X. Zauważmy, że $\theta = \theta'\gamma$. Aby się o tym przekonać, weźmy zmienną y i wyliczmy $y\theta$. Ten term jest równy $y\theta'\gamma'$. W termie $y\theta'$ nie występują zmienne ze zbioru X, a ponieważ γ i γ' różnią się najwyżej na zmiennych ze zbioru X, więc $(y\theta')\gamma' = (y\theta')\gamma = y(\theta'\gamma)$. $\Box$

Lemat 5.2 *Niech P będzie programem, N – celem, a θ – podstawieniem. Załóżmy, że istnieje SLD-wyprowadzenie z programu P klauzuli pustej $\Box$, rozpoczynające się się klauzulą $N\theta$, z ciągiem podstawień $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ i z ciągiem $C_1, C_2, \ldots, C_n$ wariantów klauzul z P, w którym klauzula C_1 nie zawiera zarówno zmiennych występujących w N, jak i przekształcanych przez θ. Wtedy istnieje SLD-wyprowadzenie z programu P klauzuli pustej $\Box$, rozpoczynające się się klauzulą N, z ciągiem podstawień $\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_n$ takim, że podstawienie $\theta'_1\theta'_2 \ldots \theta'_n$ jest bardziej ogólne niż $\theta\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n$.*

Dowód. Niech $N = \leftarrow A_1, \ldots, A_k$. Lemat dowodzimy przez indukcję ze względu na długość wyprowadzenia.

Przypuśćmy, że klauzulę pustą wyprowadzamy z $N\theta$ w jednym kroku. Wtedy $k = 1$ i $N = \leftarrow A_1$. W takim wyprowadzeniu klauzulę $N\theta$ unifikujemy z klauzulą $C_1 = A \leftarrow$. Niech θ_1 będzie najogólniejszym unifikatorem $A_1\theta$ i A. Wobec tego $A_1\theta\theta_1 = A\theta_1$. Zauważmy, że $\theta\theta_1$ unifikuje formuły A_1 i A. Założenie o klauzurze C_1 implikuje bowiem, że θ nie zmienia zmiennych występujących w C_1, a więc $A\theta = A$ oraz

$$A_1\theta\theta_1 = A\theta_1 = A\theta\theta_1.$$

Niech θ'_1 będzie najogólniejszym unifikatorem A_1 oraz A. Nietrudno sprawdzić, że ciąg $\leftarrow A_1, \Box$ z jednowyrazowymi ciągami $A \leftarrow$ oraz θ'_1 jest *SLD*-wyprowadzeniem spełniającym tezę lematu.

Załóżmy więc, że długość rozważanego wyprowadzenia jest równa $n+1$. Przypuśćmy, że w pierwszym kroku unifikujemy atom $A_m\theta$ z następnikiem klauzuli $C_1 = A \leftarrow B_1, \ldots, B_p$ i robimy to za pomocą najogólniejszego unifikatora θ_1. Wobec tego klauzula N_1 jest równa

$$(\leftarrow A_1\theta, \ldots, A_{m-1}\theta, B_1, \ldots, B_p, A_{m+1}\theta, \ldots, A_k\theta)\theta_1.$$

Ponieważ θ nie zmienia zmiennych występujących w C_1, więc N_1 można zapisać w postaci

$$(\leftarrow A_1, \ldots, A_{m-1}, B_1, \ldots, B_p, A_{m+1}, \ldots, A_k)\theta\theta_1.$$

Z tego samego powodu podstawienie $\theta\theta_1$ jest unifikatorem klauzul A_m oraz A. Istnieje więc najogólniejszy unifikator tych klauzul. Niech θ_1' będzie takim unifikatorem. Załóżmy ponadto, że θ_1' wraz z podstawieniem γ spełniają tezą lematu 5.1 dla zbioru X zmiennych występujących w C_2, czyli spełniają równość $\theta\theta_1 = \theta_1'\gamma$ i dodatkowo γ nie podstawia za zmienne z klauzuli C_2, a formuły postaci $D\theta'$ nie zawierają zmiennych z występujących w C_2. Wobec tego klauzula N_1 jest równa

$$(\leftarrow A_1, \ldots, A_{m-1}, B_1, \ldots, B_p, A_{m+1}, \ldots, A_k)\theta_1'\gamma$$

i rozważane wyprowadzenie, po usunięciu z niego pierwszego wyrazu i pierwszych wyrazów ciągu wariantów klauzul programowych i podstawień staje się *SLD*-wyprowadzeniem klauzuli pustej z programu P, rozpoczynającym się klauzulą N_1. Wyprowadzenie to ma długość n. Możemy więc skorzystać z założenia indukcyjnego dla celu

$$(\leftarrow A_1, \ldots, A_{m-1}, B_1, \ldots, B_p, A_{m+1}, \ldots, A_k)\theta_1'$$

i podstawienia γ.

Z założenia indukcyjnego wynika, że istnieje *SLD*-wyprowadzenie z programu P klauzuli pustej, rozpoczynające się klauzulą

$$(\leftarrow A_1, \ldots, A_{m-1}, B_1, \ldots, B_p, A_{m+1}, \ldots, A_k)\theta_1'$$

z ciągiem podstawień $\theta_2', \theta_3', \ldots, \theta_n'$ takim, że podstawienie $\theta_2'\theta_3' \ldots \theta_n'$ jest bardziej ogólne niż $\gamma\theta_2\theta_3 \ldots \theta_n$. Nietrudno sprawdzić, że uzupełniając na początku to wyprowadzenie o klauzulę $N = \leftarrow A_1, \ldots, A_k$, a ciągi wariantów klauzul programowych i podstawień odpowiednio o $C_1 = A \leftarrow B_1, \ldots, B_p$ oraz θ_1' otrzymujemy *SLD*-wyprowadzenie z programu P klauzuli pustej, rozpoczynające się klauzulą N. Jest oczywiste, że złożenie $\theta_1'\theta_2' \ldots \theta_n'$ jest bardziej ogólne niż $\theta_1'\gamma\theta_2\theta_3 \ldots \theta_n$. To ostatnie złożenie jest równe $\theta\theta_1\theta_2\theta_3 \ldots \theta_n$. $\square$