Wykład 4.

4.1 Operator bezpośredniej konsekwencji

Przypuśćmy, że mamy dany program P i podzbiór I bazy Herbranda. Niech $g(P)$ oznacza zbiór wszystkich formuł, które otrzymujemy w wyniku podstawienia termów stałych w klauzulach ze zbioru P w taki sposób, aby zastąpić wszystkie zmienne występujących w tych klauzulach. Przyjmijmy, że

$$T_P(I) = \{A \in \mathcal{B} : \exists B_1 \in I \ \ldots \ \exists B_n \in I \ \ A \leftarrow B_1, \ldots, B_n \in g(P)\}.$$

Zauważmy, że

$$T_P : 2^{\mathcal{B}} \to 2^{\mathcal{B}}$$

oraz

$$I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow T_P(I_1) \subseteq T_P(I_2)$$

dla dowolnych $I_1, I_2 \subseteq \mathcal{B}$. Taką funkcję nazywamy operatorem monotonicznym. Funkcję T_P nazywamy operatorem bezpośredniej konsekwencji.

Lemat 4.1 *Przypuśćmy, że P jest programem, a I jest podzbiorem $\mathcal{B}$. Wszystkie klauzule z P są spełnione w $\mathcal{H}_I$ wtedy i tylko wtedy, $T_P(I) \subseteq I$.*

Dowód. Weźmy najpierw $A \in T_P(I)$. Taka formuła A jest następnikiem implikacji $A \leftarrow B_1, \ldots, B_n \in g(P)$ takiej, że $B_1, \ldots, B_n \in I$. W strukturze $\mathcal{H}_I$ są spełnione wszystkie formuły $B_1, \ldots, B_n$ (ponieważ należą do I) oraz formuła $A \leftarrow B_1, \ldots, B_n$. Formuła ta jest postaci $\varphi\theta$ dla pewnej klauzuli $\varphi \in P$ i pewnego podstawienia θ. Z założenia wynika, że $\mathcal{H}_I \models \forall\vec{x}\varphi$. Wobec tego także $\mathcal{H}_I \models \varphi\theta$. Jeżeli pewna implikacja i jej poprzedniki są prawdziwe w pewnej strukturze, to w tej strukturze jest prawdziwy także następnik implikacji, a więc $\mathcal{H}_I \models A$. Ponieważ A jest stałą formułą atomową, więc $A \in I$.

Niech teraz φ będzie klauzulą z P. Aby dowieść, że $\mathcal{H}_I \models \forall\vec{x}\varphi$, wystarczy wykazać, że $\mathcal{H}_I \models \varphi[h]$ przy dowolnym wartościowaniu h w strukturze $\mathcal{H}_I$. Takie wartościowanie zmiennym przyporządkowuje termy stałe. Niech θ będzie funkcją, która dowolnej zmiennej x występującej w φ przyporządkowuje term $h(x)$. Jest oczywiste, że $\varphi\theta \in g(P)$, oraz aby wykazać, że $\mathcal{H}_I \models \varphi[h]$ wystarczy dowieść, że $\mathcal{H}_I \models \varphi\theta$.

Przypuśćmy, że $\varphi\theta = A \leftarrow B_1, \ldots, B_n$. Są możliwe dwa przypadki.

Przypadek 1: $\mathcal{H}_I \models B_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Formuły B_i należą więc do I. Definicja $T_P(I)$ gwarantuje, że $A \in T_P(I)$. Z założenia otrzymujemy, że $A \in I$. Tak więc $\mathcal{H}_I \models A$. Jeżeli następnik implikacji $\varphi\theta$ jest spełniony w strukturze $\mathcal{H}_I$, to także cała implikacja jest w tej strukturze spełniona.

Przypadek 2: $\mathcal{H}_I \not\models B_i$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$.

W tym przypadku implikacja $\varphi\theta$ ma poprzednik, który nie jest spełniony w strukturze $\mathcal{H}_I$. Taka implikacja jest oczywiście spełniona w tej strukturze.

□

Jeżeli $T_P(I) \subseteq I$, to I określamy jako „pre-fixpoint” lub jako punkt pre-stały operatora T_P.

4.2 Operatory i punkty stałe

Dla dowolnego zbioru X, zbiór 2^X wszystkich jego podzbiorów z relacją zawierania jest kratą zupełną. Oznacza to zwłaszcza, że dla każdej rodziny $\mathcal{X} \subseteq 2^X$ istnieje kres górny tej rodziny, a więc istnieje $S \subseteq X$ taki, że dla wszystkich $A \in \mathcal{X}$ zachodzi zawieranie $A \subseteq S$, i ponadto S jest zawarty w każdym innym zbiorze o podanej własności. Nietrudno zauważyć, że w rozważanej kracie kresem górnym rodziny $\mathcal{X}$ jest suma mnogościowa wszystkich elementów tej rodziny. Podobnie, dla każdej rodziny $\mathcal{X} \subseteq 2^X$ istnieje kres dolny tej rodziny, a więc istnieje $S \subseteq X$ taki, że dla wszystkich $A \in \mathcal{X}$ zachodzi zawieranie $S \subseteq A$, i ponadto S zawiera każdy inny zbiór o podanej własności. W rozważanej kracie kresem dolnym rodziny $\mathcal{X}$ jest przekrój wszystkich elementów tej rodziny.

Twierdzenie 4.2 (Knaster – Tarski) *Niech T będzie operatorem monotonicznym w kracie (zupełnej) 2^X. Wtedy kres dolny zbioru*

$$\mathcal{X} = \{A \subseteq X : T(A) \subseteq A\}$$

jest najmniejszym punktem stałym operatora T.

Niech B będzie kresem dolnym $\mathcal{X}$. Wobec tego $B \subseteq A$ dla dowolnego $A \in \mathcal{X}$. Monotoniczność T implikuje, że $T(B) \subseteq T(A) \subseteq A$ dla dowolnego $A \in \mathcal{X}$. Oznacza to, że $T(B)$ ogranicza zbiór $\mathcal{X}$ z dołu, czyli jest zawarty w każdym elemencie zbioru $\mathcal{X}$ i, w konsekwencji, jest zawarty w B. Tak więc B jest punktem pre-stałym operatora T. Stąd w szczególności wynika, że $B \in \mathcal{X}$.

Monotoniczność T implikuje także, że jeżeli A jest punktem pre-stałym operatora T, to także $T(A)$ jest punktem pre-stałym T. Wobec tego także $T(B) \in \mathcal{X}$. Implikuje to, że $B \subseteq T(B)$. Tak więc mamy $T(B) = B$, czyli B jest punktem stałym operatora T. Ponieważ wszystkie punkty stałe operatora T należą do $\mathcal{X}$, punkt B (jako kres dolny $\mathcal{X}$) jest najmniejszym punktem stałym operatora T. □

Zauważmy, że jeżeli $A_1, A_2, \ldots$ jest niemalejącym ciągiem podzbiorów X (czyli $A_i \subseteq A_{i+1}$ dla wszystkich i), a T jest operatorem monotonicznym, to

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} T(A_i) \subseteq T(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i).$$

Operator T jest ciągły, jeżeli dla dowolnego niemalejącego ciągu $A_1, A_2, \ldots$ zachodzi zawieranie

$$T(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} T(A_i).$$

Lemat 4.3 *Operator T_P jest ciągły.*

Dowód. Jest to konsekwencja postaci definicji operatora T_P. Jeżeli skończenie wiele elementów należy do sumy niemalejącego (nieskończonego) ciągu zbiorów, to wszystkie muszą należeć do pewnego wyrazu tego ciągu. □

Zdefiniujmy

$$T_0 = \emptyset, \quad T_{n+1} = T(T_n) \ \text{ oraz } \ T^{\omega} = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i.$$

Zauważmy, że jeżeli T jest operatorem monotonicznym, to ciąg $T_0, T_1, T_2, \ldots$ jest niemalejący.

Twierdzenie 4.4 (Tarski) *Jeżeli T jest operatorem monotonicznym i ciągłym, to T^ω jest punktem stałym operatora T i jest to najmniejszy punkt pre-stały operatora T.*

Dowód. Zauważmy, że

$$T(T^\omega) = T(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i) = T(\bigcup_{i=0}^{\infty} T_i) = \bigcup_{i=0}^{\infty} T(T_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = T^\omega.$$

Przypuśćmy, że A jest punktem pre-stałym operatora T. Oczywiście $T_0 \subseteq A$. Przez indukcję pokazujemy, że $T_i \subseteq A$. Mamy bowiem $T_{i+1} = T(T_i) \subseteq T(A) \subseteq A$. Wobec tego A ogranicza z góry zbiór wszystkich elementów postaci T_i. Jest więc większy od kresu górnego tego zbioru, a więc $T^\omega \subseteq A$. □

Będziemy rozważać model Herbranda wyznaczony przez T_P^ω. Przyjmijmy, że jest to $M_P = \mathcal{H}_{T_P^\omega}$. Jest to „najmniejszy" model Herbranda, w którym są spełnione wszystkie klauzule z programu P. Podstawowe własności tego modelu wyraża następujący wniosek.

Wniosek 4.5 *Niech P będzie programem. W strukturze M_P są spełnione wszystkie klauzule należące do P. Dla dowolnego $I \subseteq \mathcal{B}$, jeżeli w $\mathcal{H}_I$ są spełnione wszystkie klauzule z P, to $T_P^\omega \subseteq I$. Ponadto, jeżeli stała formuła atomowa A jest spełniona we wszystkich strukturach spełniających wszystkie klauzule z P (jeżeli A jest konsekwencją logiczną P), to $A \in T_P^\omega$.*

Dowód. Pierwsza własność wynika z lematu 4.1. Druga – z twierdzenia Knastera-Tarskiego. Trzecia jest konsekwencją pierwszej i związku między zbiorem I i spełnianiem formuł atomowych w $\mathcal{H}_I$. □