Wykład 3.

3.1 Modele Herbranda

Język można utożsamiać ze zbiorami symboli relacyjnych i funkcyjnych oraz zbiorem symboli stałych. Będziemy rozważać języki zawierające przynajmniej jedną stałą i nie zawierające symbolu równości =. Dalej rozważamy jeden taki ustalony język.

Termem stałym nazywamy term, w którym nie występuje żadna zmienna. Zbiór termów stałych możemy także zdefiniować indukcyjnie jako najmniejszy spośród zbiorów zawierających wszystkie stałe i zamkniętych na zwykły sposób budowania bardziej złożonych termów (tak więc jeżeli $t_1, \ldots, t_n$ są termami stałymi, a f jest jest symbolem funkcyjnym arności n, to $f(t_1, \ldots, t_n)$ też jest termem stałym). Zbiór termów stałych będziemy oznaczamy symbolem $\mathcal{H}$

Będziemy rozważać struktury o szczególnym uniwersum, zwanym uniwersum Herbranda. Uniwersum to jest równe zbiorowi $\mathcal{H}$ wszystkich termów stałych.

Strukturą Herbranda $\mathcal{A}$ nazywamy dowolną strukturę z uniwersum równym uniwersum Herbranda, w której stałą a interpretujemy jako term a (interpretacją stałej a jest ustalony element uniwersum, w tym przypadku pewien term stały, a dokładniej: term równy a, mamy więc $a^{\mathcal{A}} = a$), a symbol funkcyjny f (arności n) interpretujemy jako funkcję, która n-ce elementów z uniwersum Herbranda, a więc termom stałym $t_1, \ldots, t_n$ przyporządkowuje term stały utworzony przez poprzedzenie danej n-ki symbolem f, a więc

$$f^{\mathcal{A}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n).$$

Zauważmy, że jeżeli t jest termem stałym, $\mathcal{A}$ jest dowolną strukturą, a α_1 i α_2 są dowolnymi wartościowaniami zmiennych w strukturze $\mathcal{A}$, to wartości termu t w strukturze $\mathcal{A}$ przy tych dwóch wartościowaniach są identyczne, czyli $t[\alpha_1] = t[\alpha_2]$. Ponieważ wartość termu stałego t w strukturze $\mathcal{A}$ nie zależy od wartościowania, więc będziemy ją oznaczać symbolem $t^{\mathcal{A}}$. Mamy więc dla takich termów $t^{\mathcal{A}} = t[\alpha]$ dla dowolnego wartościowania zmiennych w strukturze $\mathcal{A}$.

Fakt 3.1 Stały term t jest interpretowany w strukturze Herbranda jako on sam, a więc $t^{\mathcal{A}} = t$.

Nietrudno zauważyć, że na ogół jest wiele struktur Herbranda dla danego języka. Struktury te różnią się interpretacjami symboli relacyjnych.

Bazą Herbranda nazywamy zbiór stałych formuł atomowych, a więc formuł atomowych, w których nie występują zmienne. Bazę Herbranda będziemy oznaczać symbplem $\mathcal{B}$.

Przypuśćmy, że I jest podzbiorem bazy Herbranda. Zbiór I wyznacza pewną szczególną strukturę Herbranda: taką strukturę $\mathcal{A}$, w której interpretacja $p^{\mathcal{A}}$ symbolu relacyjnego p jest zdefiniowana wzorem

$$(t_1, \ldots, t_n) \in p^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow p(t_1, \ldots, t_n) \in I. \tag{5}$$

Zdefiniowaną strukturę oznaczamy symbolem $\mathcal{H}_I$. Jest oczywiste, że każda struktura Herbranda jest wyznaczona przez pewien podzbiór bazy Herbranda.

Fakt 3.2 Jeżeli $p(t_1, \ldots, t_n)$ jest stałą formułą atomową, $\mathcal{H}_I$ jest strukturą Herbranda spełniającą równoważność (5) dla danego zbioru I, a h jest dowolnym wartościowaniem w tej strukturze, to następujące warunki są równoważne:

1) $\mathcal{H}_I \models p(t_1, \ldots, t_n)$,

2) $\mathcal{H}_I \models p(t_1, \ldots, t_n)[h]$,

3) $(t_1, \ldots, t_n) \in p^{\mathcal{H}_I}$,

4) $p(t_1, \ldots, t_n) \in I$.

Formułę nazywamy uniwersalną, jeżeli jest postaci

$$\forall x_1 \ \ldots \ \forall x_n \ \varphi,$$

gdzie φ jest formułą bez kwantyfikatorów. Przykładami formuł uniwersalnych są dowolne klauzule programowe.

Twierdzenie 3.3 *Jeżeli S jest zbiorem formuł uniwersalnych i wszystkie formuły z S są spełnione w pewnej strukturze, to są też spełnione w pewnej strukturze Herbranda.*

Dowód. Niech $\mathcal{A}$ będzie strukturą, w której spełnione są wszystkie formuły ze zbioru S. Przypuśćmy, że A jest uniwersum struktury $\mathcal{A}$. Zdefiniujmy funkcję $f : \mathcal{H} \to A$. Funkcja ta termowi $t \in \mathcal{H}$ (stałemu) przyporządkowuje interpretację $t^{\mathcal{A}}$ tego termu w strukturze $\mathcal{A}$. Niech I będzie zbiorem spełniającym równoważność

$$p(t_1, \ldots, t_n) \in I \Leftrightarrow \mathcal{A} \models p(t_1, \ldots, t_n).$$

Będziemy rozważać strukturę Herbranda $\mathcal{H}_I$.

Weźmy dowolne wartościowanie h w strukturze $\mathcal{H}_I$. Wartościowanie to przyporządkowuje zmiennym elementy uniwersum struktury $\mathcal{H}_I$, a więc termy stałe. Niech h^* będzie wartościowaniem zmiennych w strukturze $\mathcal{A}$ zdefiniowanym wzorem $h^*(x) = h(x)^{\mathcal{A}}$, czyli $h^*(x)$ jest wartością termu $h(x)$ w strukturze $\mathcal{A}$. Niech t będzie dowolnym termem. Wartość $t[h]$ tego termu w strukturze $\mathcal{H}_I$ przy wartościowaniu h elementem tej struktury, a więc jest termem stałym. Dla dowolnego termu t i wartościowania h w strukturze $\mathcal{H}_I$ zachodzi następujący wzór:

$$(t[h])^{\mathcal{A}} = t[h^*].$$

Wzór ten dowodzimy bez trudu przez indukcję ze względu na budowę termów. Z tego wzoru i z definicji spełniania formuł atomowych otrzymujemy, że

$$\mathcal{H}_I \models p(t_1, \ldots, t_n)[h] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models p(t_1, \ldots, t_n)[h^*]. \tag{6}$$

Jest to konsekwencja następujących równoważności:

$$\mathcal{H}_I \models p(t_1, \ldots, t_n)[h] \Leftrightarrow (t_1[h], \ldots, t_n[h]) \in p^{\mathcal{H}_I}$$

(na podstawie definicji spełniania),

$$(t_1[h], \ldots, t_n[h]) \in p^{\mathcal{H}_I} \Leftrightarrow p(t_1[h], \ldots, t_n[h]) \in I$$

(na podstawie wcześniej podanego faktu),

$$p(t_1[h], \ldots, t_n[h]) \in I \Leftrightarrow \mathcal{A} \models p(t_1[h], \ldots, t_n[h])$$

(wynika to z definicji I),

$$\mathcal{A} \models p(t_1[h], \ldots, t_n[h]) \Leftrightarrow (t_1[h]^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n[h]^{\mathcal{A}}) \in p^{\mathcal{A}}$$

(z definicji spełniania)

$$(t_1[h]^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n[h]^{\mathcal{A}}) \in p^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (t_1[h^*], \ldots, t_n[h^*]) \in p^{\mathcal{A}}$$

(z podanego wzoru)

$$(t_1[h^*], \ldots, t_n[h^*]) \in p^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models p(t_1, \ldots, t_n)[h^*]$$

(znowu z definicji spełniania).

Z równoważności (6), przez indukcję ze względu na budowę formuły wnioskujemy, że analogiczna równoważność zachodzi także dla dowolnej formuły bez kwantyfikatorów. Tak więc

$$\mathcal{H}_I \models \varphi[h] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[h^*]$$

dla dowolnej formuły φ bez kwantyfikatorów.

Stąd już łatwo otrzymać tezę. Przypuśćmy, że $\forall \vec{x}\ \varphi \in S$. Z definicji spełniania wynika, że aby dowieść, że $\mathcal{H}_I \models \forall \vec{x}\ \varphi$, wystarczy dowieść, że $\mathcal{H}_I \models \varphi[h]$ dla dowolnego wartościowania h. Na podstawie udowodnionej równoważności stwierdzamy, że wystarczy wykazać, że $\mathcal{A} \models \varphi[h^*]$ dla dowolnego h. Wiemy jednak, że $\mathcal{A} \models \forall \vec{x}\ \varphi$, a to oznacza, że $\mathcal{A} \models \varphi[\alpha]$ dla dowolnego wartościowania α, a więc także dla każdego wartościowania postaci h^*. $\square$

Wniosek 3.4 *Formuła uniwersalna jest spełniona w pewnej strukturze wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona w pewnej strukturze Herbranda.*