Programowanie w Logice

Lista nr 5 z dnia 7 czerwca 1999.

Zadanie 1. Dla danej sygnatury $\Sigma = \Sigma_R \cup \Sigma_F$, bazą Herbranda HB nazywamy zbiór atomów stałych nad Σ, tzn. zbiór wyrażeń $r(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie $r \in \Sigma_R$, a $t_1, \ldots, t_n$ są termami stałymi nad Σ_F. Model Herbranda I utożsamiamy z podzbiorem zbioru HB: przyjmujemy, że

$$I \models r(t_1, \ldots, t_n) \Longleftrightarrow r(t_1, \ldots, t_n) \in I.$$

Niech P będzie programem, czyli zbiorem (uniwesalnych domknięć) klauzul Horna. Niech $I_P = \{A \in HB : P \models A\}$. Udowodnij, że

1. $I_P \models P$,
2. jeżeli $I \subseteq HB$ oraz $I \models P$, to $I_P \subseteq I$.

Zadanie 2. Niech P będzie programem. Symbolem $ground(P)$ oznaczamy zbiór wszystkich formuł otrzymanych w wyniku podstawienia stałych termów w formułach należących do P Drzewem implikacji dla atomu stałego B względem programu P nazywamy skończone drzewo etykietowane atomami, z atomem B w korzeniu i o tej własności, że dla każdego wierzchołka o etykiecie A istnieje reguła $A \longleftarrow C \in ground(P)$ taka, że dziećmi wierzchołka z etykietą A są dokładnie atomy z C. Udowodnij, że dla programu P i atomu A następujące warunki są równoważne:

1. $A \in I_P$,
2. istnieje drzewo implikacji dla A względem P.

Zadanie 3. Udowodnij, że $\emptyset \subseteq HB$ jest modelem dla programu P wtedy i tylko wtedy, gdy każda reguła z P ma niepuste ciało (tzn. nie ma faktów).

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli X i Y są modelami dla P, to $X \cap Y$ też jest modelem dla P. Czy $X \cup Y$ jest takim modelem?

Zadanie 5. Niech P będzie programem. Operatorem konsekwencji dla P jest funkcja $Op : \mathcal{P}(HB) \to \mathcal{P}(HB)$, zdefiniowana wzorem:

$$Op(X) := \{A \in HB : \exists C \subseteq X \ (A \longleftarrow C) \in ground(P)\}.$$

Zbiór X jest punktem stałym operatora O, jeśli $O(X) = X$. Wykaż, że I jest modelem P wtedy i tylko wtedy, gdy I jest punktem stałym operatora Op.

Antoni Kościelski, 7 czerwca 1999 r.