Programowanie w Logice

Lista nr 4 z dnia 18 maja 1999.

Zadanie 1. Niech Σ będzie (nieskończonym) zbiorem formuł (form) zdaniowych. Udowodnij twierdzenie o zwartości dla rachunku zdań: Σ jest spełnialne wtedy i tylko wtedy, gdy każdy skończony podzbór zbioru Σ jest spełnialny.

Zadanie 2. $\models \varphi$ oznacza, że φ jest tautologią, a więc jest spełnione przy każdej interpretacji. Niech φ będzie formułą bez kwantyfikatorów. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. $\models \exists\vec{x}\varphi$ ($\vec{x}$ zawiera wszystkie zmienne z φ),
2. istnieje skończenie wiele podstawień stałych (bez zmiennych) $\theta_1, \ldots, \theta_k$ takich, że $\models \varphi\theta_1 \vee \ldots \vee \varphi\theta_k$.

Podaj przykład formuły, dla której $k > 1$.

Zadanie 3. (b. łatwe) Zdanie uniwersalne

$$(\forall x)(R(c) \wedge \neg R(f(c)) \wedge R(f(f(f(c)))) \wedge (R(x) \vee \neg R(f(f(f(x))))) \wedge (\neg R(x) \vee R(f(f(x)))))$$

jest niespełnialne. Udowodnij, to metodą rezolucji uogólnionej (podaj podstawienia, które pozwolą na wyprowadzenie klauzuli pustej).

Zadanie 4. Zbuduj równoważne zdania w postaci preneksowej i w postaci Skolema (uniwersalne) następujących zdań:

1. $(\exists x)((\forall y \exists z)P(x,y,z) \wedge (\exists z \forall y)\neg P(x,y,z))$,
2. $(\forall x)((\exists y)Q(x,y) \vee (\forall y \exists z)R(x,y,z))$,
3. $(\forall x)(\neg(\exists x)P(x,y) \to (\exists x)Q(x,x))$.

Zadanie 5. Znajdź postać Skolema podanych formuł oraz znajdź odpowiednie stałe podstawienia i udowodnij, że następujące zdania są niespełnialne (wyprowadzając formułę pustą):

1. $(\exists x \forall y)R(x,y) \wedge (\forall y \exists x)\neg R(y,x)$,
2. $\neg((\forall x)P(x) \vee (\exists y)\neg Q(y)) \wedge ((\forall z)P(z) \vee (\exists w)\neg Q(w))$,
3. $(\exists x \forall y)(R(x,y) \leftrightarrow \neg R(y,y))$,
4. $(\exists x \forall y)(R(x,y) \leftrightarrow \neg(\exists z \exists u)(R(y,z) \wedge R(z,u) \wedge R(u,y)))$.

Zadanie 6. Udowodnij twierdzenie o zwartości: Nieskończony zbiór zdań jest spełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnialny jest każdy jego skończony podzbiór (skorzystaj ze skolemizacji i twierdzenia o rezolucji).

Antoni Kościelski, 19 maja 1999 r.