Programowanie w Logice

Lista nr 3 z dnia 14 kwietnia 1999.

Zadanie 1. Powtórzyć dowód twierdzenia, że jeśli zdanie uniwersalne w języku bez równości ma model, to ma model z uniwersum Herbranda, ewentualnie w języku rozszerzonym o stałą i symbol funkcji unarnej, w którym interpretacją symbolu funkcyjnego f jest funkcją f^H taka, że $f^H(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$.

Zadanie 2. Jeśli I_1 i I_2 są interpretacjami języka Σ, to mówimy, że I_1 jest podinterpretacją (podstrukturą) I_2, jeśli

1. $Un(I_1) \subseteq Un(I_2)$ ($Un(I)$ to uniwersum interpretacji I),
2. dla każdego symbolu relacyjnego $R \in \Sigma$ zachodzi równość $R^{I_1} = R^{I_2} \cap (Un(I_1))^n$ (n to arność symbolu R),
3. dla każdego symbolu funkcyjnego $f \in \Sigma$ zachodzi równość $f^{I_1} = f^{I_2} \lceil (Un(I_1))^n$ (n to arność symbolu f).

Wykazać, że jeśli ϕ jest formułą uniwersalną, a σ wartościowaniem w I_2 takim, że $I_2 \models \phi[\sigma]$, to $I_1 \models \phi[\sigma]$.

Zadanie 3. Relacja równoważności $\sim$ na $Un(I)$ jest kongruencją, jeśli dla wszystkich symboli relacyjnych R i funkcyjnych f oraz dla każdych $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ takich, że $a_i \sim b_i$ dla $i \leq n$, spełnione są następujące warunki:

$$R^I(a_1, \ldots, a_n) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } R^I(b_1, \ldots, b_n)$$

oraz

$$f^I(a_1, \ldots, a_n) = f^I(b_1, \ldots, b_n)$$

(n – arność symbolu). Określamy interpretację I_1 kładąc $Un(I_1) = (Un(I))/_\sim$ (ten symbol oznacza zbiór klas abstrakcji względem relacji $\sim$),

$$R^{I_1}([a_1], \ldots, [a_n]) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } R^I(a_1, \ldots, a_n)$$

($[a]$ oznacza klasę abstrakcji elementu a) oraz

$$f^{I_1}([a_1], \ldots, [a_n]) = f^I(a_1, \ldots, a_n).$$

Wykazać, że jeżeli $\sim$ jest kongruencją, to definicja I_1 jest poprawna oraz dla dowolnej formuły ϕ i dowolnego wartościowania σ w strukturze I warunek $I \models \phi[\sigma]$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $I_1 \models \phi[\sigma/_\sim]$, gdzie $\sigma/_\sim$ jest wartościowaniem zdefiniowanym wzorem $\sigma/_\sim(x) = [\sigma(x)]$.

Zadanie 4. Strukturę I_1 zdefiniowaną w poprzednim zadaniu nazywamy strukturą ilorazową. Udowodnić, że dla dowolnej formuły uniwersalnej ϕ (także dla formuły z równością), formuła ta jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełnialna w strukturze ilorazowej interpretacji Herbranda.

Antoni Kościelski, 14 kwietnia 1999 r.