Programowanie w Logice

Lista nr 1 z dnia 27 lutego 2000.

Zadanie 1. Udowodnij, że następujące pary składają się z formuł równoważnych (Q i Q_i oznaczającą kwantyfikatory uniwersalny lub egzystencjalny; jeżeli Q oznacza jakiś kwantyfikator, to $\bar{Q}$ oznacza kwantyfikator różny od Q):

1. $(Qx)\varphi(x) \vee \psi$ oraz $(Qx)(\varphi(x) \vee \psi)$,
2. $(Qx)\varphi(x) \wedge \psi$ oraz $(Qx)(\varphi(x) \wedge \psi)$,
3. $\neg((Qx)\varphi(x))$ oraz $(\bar{Q}x)\neg\varphi(x)$,
4. $(\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$ oraz $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$,
5. $(\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$ oraz $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x))$,
6. $(Q_1x)\varphi(x) \wedge (Q_2x)\psi(x)$ oraz $(Q_1x)(Q_2y)(\varphi(x) \wedge \psi(y))$,
7. $(Q_1x)\varphi(x) \vee (Q_2x)\psi(x)$ oraz $(Q_1x)(Q_2y)(\varphi(x) \vee \psi(y))$.

Zadanie 2. Udowodnij, że jeśli $\varphi \longleftrightarrow \psi$ jest tautologią rachunku zdań zawierającą zmienne $p_1, \ldots, p_n$ oraz $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ są dowolnymi zdaniami, to formuły $\varphi(p_1/\varphi_1)\ldots(p_n/\varphi_n)$ oraz $\psi(p_1/\varphi_1)\ldots(p_n/\varphi_n)$ są równoważne ($\varphi(p_1/\varphi_1)\ldots(p_n/\varphi_n)$ oznacza formułę otrzymaną z φ przez zastąpienie zmiennych p_i formułami φ_i).

Zadanie 3. Korzystając z poprzednich zadań udowodnij, że dla każdej formuły φ istnieje równoważna formuła ψ w postaci preneksowej, tzn. w postaci

$$Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\varphi_0,$$

gdzie φ_0 jest formułą bez kwantyfikatorów. Opisz algorytm przekształcającą daną formułe w równoważną formułę w postaci preneksowej.

Antoni Kościelski, 28 lutego 2000 r.