

1 Dowód twierdzenia o pełności

Zostanie tutaj przedstawiony dowód twierdzenia o pełności, który być może przypomina dowód oryginalny, ale został opracowany później i zawiera elementy przypisywane L. Henkinowi. Dowód będzie nieefektywny, nie będzie podawał konstrukcji dowodu twierdzenia, sprowadzi do sprzeczności fakt nieistnienia dowodu. Zostanie przeprowadzony przy milczącym założeniu, że teoria jest zapisana w przeliczalnym języku (wykorzystuje przeliczalnie wiele symboli funkcyjnych i relacyjnych). Założenie to nie jest istotne, ale po jego opuszczeniu konieczne jest odwołanie się do aksjomatu wyboru. Dowód zostanie też przedstawiony w przypadku teorii bez równości. Dla teorii z równością potrzebna jest jeszcze dodatkowa konstrukcja ilorazowa, która zostanie pominięta.

Potrzebne będą dwa pomocnicze twierdzenia.

Twierdzenie 1.1 (o dedukcji, Jacques Herbrand) *Niech φ będzie zdaniem. Formuła ψ jest twierdzeniem teorii T z dodatkowym aksjomatem φ (teorii $T \cup \{\varphi\}$) wtedy i tylko wtedy, gdy implikacja $\varphi \Rightarrow \psi$ jest twierdzeniem teorii T . $\square$*

Twierdzenie 1.2 (o stałej) *Przypuśćmy, że stała c nie występuje w formule φ , ani w aksjomatach teorii T . Jeżeli formuła $\varphi[x \leftarrow c]$ jest twierdzeniem teorii T , to w teorii T można dowieść także formuły $\forall x\varphi$ oraz φ . Co więcej, można to zrobić nie używając w tych dowodach stałej c (formuły te można dowieść w języku bez stałej c). $\square$*

Przystępujemy teraz do dowodu twierdzenia o pełności.

Twierdzenie 1.3 (o pełności, Kurt Gödel, 1929) *Jeżeli formuła φ jest spełniona w każdym modelu teorii T , to φ daje się dowieść w teorii T .*

Dowód. Na razie twierdzenie o pełności sprowadzimy do innej, następującej postaci: Jeżeli teoria T' jest niesprzeczna, to istnieje struktura, w której są spełnione wszystkie aksjomaty teorii T' .

O φ możemy dodatkowo założyć, że jest zdaniem. Założmy też dla dowodu nie wprost, że φ nie jest twierdzeniem teorii T .

Nietrudno zauważyć, że wtedy teoria $T \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna. Gdyby bowiem istniała formuła σ taka, że

$$T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \sigma \wedge \neg\sigma,$$

to na mocy twierdzenia o dedukcji otrzymalibyśmy, że

$$T \vdash \neg\varphi \Rightarrow \sigma \wedge \neg\sigma.$$

Dalej, z prawa kontrapozycji wynikałoby, że

$$T \vdash \neg(\sigma \wedge \neg\sigma) \Rightarrow \varphi,$$

i ostatecznie, wbrew założonej własności φ otrzymalibyśmy, że $T \vdash \varphi$.

Istnieje więc struktura $\mathcal{A}$, w której oprócz wszystkich aksjomatów teorii T jest spełnione zdanie $\neg\varphi$. Z założenia otrzymujemy jednak, że strukturze $\mathcal{A}$ jest spełnione także zdanie φ . Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż w żadnej strukturze nie mogą być jednocześnie spełnione zdanie i jego negacja. $\square$

Twierdzenie 1.4 *Jeżeli teoria T jest niesprzeczna, to istnieje struktura, w której są spełnione wszystkie aksjomaty teorii T .*

Dowód. Teoria T mówi o czymś i wiemy, że nie wynika z tego sprzeczność. Aby dowieść nasze twierdzenie, powinniśmy wyjaśnić, o czym mówimy. Wyjaśnimy to zgodnie z następującą ideą: terminy, których używamy do określania przedmiotów możemy uznać za rzeczy, o których mówimy. Na przykład, jeżeli mówimy o liczbach naturalnych, to terminy 0 , 1 , $1 + 1$, $1 + 1 + 1$ itd. oznaczają liczby naturalne i możemy je uznać za liczby naturalne. Pamiętajmy jednak, że możemy wprowadzać bardzo mało stałych i operacji. Tak postępujemy na przykład aksjomatyzując liczby rzeczywiste. Wtedy brakuje nam terminów oznaczających przedmioty, których istnienie możemy dowieść.

Krok 1. Do języka dodajemy nieskończony ciąg stałych $a_1, a_2, a_3, \dots$. W bogatszym języku możemy teoretycznie tworzyć więcej dowodów. Z twierdzenia o stałej wynika, że jeżeli teoria T jest niesprzeczna, to nie uda nam się utworzyć dowodu sprzeczności korzystając z nowych stałych. Gdyby istniał dowód sprzeczności wykorzystujący te stałe, to można by je stopniowo eliminować z dowodu i w końcu utworzyć dowód sprzeczności nie zawierający stałych. To jest jednak sprzeczne z założeniem o niesprzeczności teorii.

Krok 2. Nadajemy znaczenie nowym stałym. W tym celu tworzymy ciąg

$$\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \varphi_3(x_3), \dots$$

zawierający wszystkie formuły z jedną zmienną wolną (x_i oznacza jedyną zmienną wolną w $\varphi_i(x_i)$) w języku z nowymi stałymi. Następnie indukcyjnie tworzymy formuły

$$\Phi_n = (\exists x_n \varphi_n(x_n)) \Rightarrow \varphi_n[x_n \leftarrow c_n]$$

dobierając stałą c_n tak, aby nie występowała we wcześniej utworzonych formułach tej postaci i w samej formule φ_n . Formuły te będziemy uważać za nowe aksjomaty. Przyjmijmy, że T_n oznacza teorię T uzupełnioną o n pierwszych aksjomatów tej postaci.

Fakt 1.5 Teorie T_n są niesprzeczne.

Dowód. Dowód przez indukcję ze względu na n . Oczywiście teoria T_0 (czyli sama T bez nowych aksjomatów) jest niesprzeczna. Załóżmy teraz, że teoria T_{n-1} jest niesprzeczna, a T_n – sprzeczna. Ponieważ dodane aksjomaty są zdaniami, możemy skorzystać z twierdzenia o dedukcji. Otrzymamy, że

$$T_{n-1} \vdash ((\exists x_n \varphi_n(x_n)) \Rightarrow \varphi_n[x_n \leftarrow c_n]) \Rightarrow \sigma \wedge \neg \sigma.$$

Korzystając z prawa kontrapozycji, prawa wyłączonego środka i prawa negowania implikacji (i kilku innych) otrzymujemy, że

$$T_{n-1} \vdash \exists x_n \varphi_n(x_n) \wedge \neg \varphi_n[x_n \leftarrow c_n].$$

Oba człony powyższej koniunkcji dają się więc dowieść. Z dowodliwości drugiego członu i z twierdzenia o stałej wynika, że także

$$T_{n-1} \vdash \forall x_n \neg \varphi_n(x_n).$$

Wobec odpowiedniego prawa de Morgana, stąd i z dowodliwości pierwszego członu wynika wbrew założeniu, że teoria T_{n-1} jest sprzeczna. $\square$

Z udowodnionego faktu wynika, że teoria

$$T_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$$

jest niesprzeczna. Ponieważ ewentualny dowód sprzeczności zawierałby skończenie wiele wyrazów i powoływałby się na skończenie wiele aksjomatów, byłby także dowodem sprzeczności pewnej teorii T_n dla dostatecznie dużego n .

Krok 3. Na koniec teorię T_∞ powiększymy do teorii zupełnej. Weźmy w tym celu ciąg

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$$

wszystkich możliwych zdań i przyjmijmy, że $T_0^* = T_\infty$ oraz

$$T_{n+1}^* = \begin{cases} T_n^* & \text{jeżeli } T_n^* \vdash \psi_{n+1}, \\ T_n^* \cup \{\neg\psi_{n+1}\} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Przez indukcję dowodzimy, że wszystkie teorie T_n^* są niesprzeczne. Niesprzeczna jest również teoria

$$T^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n^*.$$

Z konstrukcji wynika, że teoria T^* jest zupełna. Dowolne zdanie ψ jest jednym z wyrazów rozważanego ciągu zdań, na przykład $\psi_{n+1} = \psi$. Definiując T_{n+1}^* podejmujemy decyzję, czy w teorii T^* da się dowieść zdanie ψ , czy jego negację. Jeżeli $T_n^* \vdash \psi_{n+1}$, to oczywiście $T^* \vdash \psi$. W przeciwnym razie $\neg\psi_{n+1}$ uznajemy za nowy aksjomat teorii T^* i wtedy mamy $T^* \vdash \neg\psi$.

Udało się nam skonstruować niesprzeczną, zupełną teorię T^* zawierającą teorię T i wszystkie aksjomaty henkinowskie Φ_n . Dla takich teorii łatwo zbudować ich model.

Krok 4. Konstrukcja modelu teorii T^* . Będziemy definiować pewną strukturę $\mathcal{A}$. Uniwersum tej struktury będzie zbiór $\mathcal{T}_c$ termów stałych rozważanego języka (ze stałymi a_i). W takiej strukturze w naturalny sposób definiujemy interpretacje symboli funkcyjnych: k -argumentowy symbol f jest interpretowany jako funkcja $F : \mathcal{T}_c^k \rightarrow \mathcal{T}_c$ zdefiniowana wzorem

$$F(t_1, \dots, t_k) = f(t_1, \dots, t_k),$$

a więc F oznacza operację tworzenia termu zaczynającego się symbolem f . W takich strukturach dla dowolnego termu t i dowolnego wartościowania h zachodzi wzór $t[h] = t[x \leftarrow h(x)][y \leftarrow h(y)] \dots$ (wartością termu t przy wartościowaniu h jest wynik podstawiania za zmienne termów wskazanych przez wartościowanie h). Zauważmy też, że w takiej sytuacji $t[h]$ jest zarówno wartością termu, jak również jest to szczególny term stały, może być więc częścią innego termu lub formuły, i może być ponownie wartościowany. Jako term stały, $t[h]$ spełnia równość $t[h][h'] = t[h]$.

Interpretację R w strukturze $\mathcal{A}$ symbolu relacyjnego r definiujemy w następujący sposób:

$$(t_1, \dots, t_k) \in R \iff T^* \vdash r(t_1, \dots, t_k)$$

dla dowolnych $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}_c$. W ten sposób struktura $\mathcal{A}$ została zdefiniowana. Bez trudu sprawdzamy, że dla dowolnych termów $t_1, \dots, t_k$ (niekoniecznie stałych) i wartościowania h zachodzi następującą własność:

$$\mathcal{A} \models r(t_1, \dots, t_k)[h] \iff T^* \vdash r(t_1[h], \dots, t_k[h]).$$

Dla stałych termów $t_1, \dots, t_k$ zachodzi także

$$\mathcal{A} \models r(t_1, \dots, t_k) \iff T^* \vdash r(t_1, \dots, t_k).$$

Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że dla dowolnego zdania ψ zachodzi równoważność

$$\mathcal{A} \models \psi \iff T^* \vdash \psi.$$

W dowodzie przyda się następujący lemat:

Lemat 1.6 *Przypuśćmy, że T jest teorią niesprzeczną i zupełną, a φ i ψ są zdaniem. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- 1) $T \vdash \varphi \vee \psi$ oraz $T \vdash \varphi$ lub $T \vdash \psi$,
- 2) $T \vdash \neg\varphi$ oraz nieprawda, że $T \vdash \varphi$. $\square$

Przytoczoną przed lematem równoważność dowodzimy przez indukcję ze względu na budowę zdania ψ . Ustaliliśmy już, że ta równoważność zachodzi dla zdań atomowych. Z podanego lematu wynika, że zachodzi dla zdań będących negacjami i alternatywami zdań prostszych pod warunkiem, że zachodzi dla członów tych zdań. Pozostało zająć się zdaniami rozpoczynającymi się kwantyfikatorem.

Przyjmijmy więc, że $\psi = \exists x\varphi$. Załóżmy, że $\mathcal{A} \models \psi$. Z definicji spełniania wynika, że wtedy

$$\mathcal{A} \models \varphi[h]$$

dla pewnego wartościowania h . Z lematu o podstawianiu (zadanie z listy 1) otrzymujemy, że

$$\mathcal{A} \models \varphi[x \leftarrow h(x)]$$

(pamiętajmy, że $\varphi[x \leftarrow h(x)]$ jest zdaniem i spełnianie tej formuły nie zależy od wartościowania). Dla formuły $\varphi[x \leftarrow h(x)]$ możemy skorzystać z założenia indukcyjnego. Wynika z niego, że

$$T^* \vdash \varphi[x \leftarrow h(x)].$$

Stąd oczywiście wynika, że

$$T^* \vdash \exists x\varphi, \quad \text{czyli} \quad T^* \vdash \psi.$$

Aby dowieść implikację odwrotną zakładamy, że $T^* \vdash \psi$, czyli że $T^* \vdash \exists x\varphi$. Formuła φ ma tylko jedną zmienną wolną i jest postaci $\varphi_n(x_n)$ dla pewnego n . Wobec tego $\psi = \exists x_n\varphi_n(x_n)$. Wiemy też, że Φ_n jest jednym z aksjomatów teorii T^* . Wobec tego, $T^* \vdash \varphi_n[x_n \leftarrow c_n]$. Stąd i z założenia indukcyjnego wynika, że

$$\mathcal{A} \models \varphi_n[x_n \leftarrow c_n].$$

Z lematu o podstawianiu (zadanie z listy 1) otrzymujemy, że

$$\mathcal{A} \models \varphi_n[h], \quad \text{albo} \quad \mathcal{A} \models \varphi[h]$$

dla podstawienia h takiego, że $h(x) = h(x_n) = c_n$. Teraz wystarczy skorzystać z definicji spełniania:

$$\mathcal{A} \models \exists x\varphi, \quad \text{czyli} \quad \mathcal{A} \models \psi.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że T^* jest teorią modelu $\mathcal{A}$. W szczególności więc struktura $\mathcal{A}$ jest modelem mniejszej teorii T . $\square$