

Lista zadań z matematycznych podstaw informatyki nr 1.

Zad. 1. Udowodnij, że następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

- 1) $\max(m_1, \dots, m_n)$ = największej liczbie spośród $m_1, \dots, m_n$,
- 2) zwykła funkcja pary $f(n, m) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$,
- 3) funkcje p i d odwrotne do funkcji f z poprzedniego punktu, a więc spełniające dla wszystkich m i n następujące równości: $p(f(m, n)) = m$, $d(f(m, n)) = n$ oraz $f(p(n), d(n)) = n$,
- 4) potęgowanie m^n rozumiane jako funkcja dwóch zmiennych,
- 5) $f(m, n) = \max\{i \leq m : n^i | m\}$.
- 6) funkcja f zdefiniowana wzorem $f(n) = n^{n^n}$.

Zad. 2. Udowodnij, że jeżeli f jest funkcją pierwotnie rekurencyjną, to także funkcja

$$\max_f(n, \vec{x}) = \max\{f(0, \vec{x}), f(1, \vec{x}), \dots, f(n-1, \vec{x})\}$$

jest pierwotnie rekurencyjna.

Zad. 3. Funkcja Ackermanna jest definiowana rekurencyjnie za pomocą następujących równości:

$$A(0, n) = n+1, \quad A(m+1, 0) = A(m, 1) \quad \text{oraz} \quad A(m+1, n+1) = A(m, A(m+1, n)).$$

Udowodnij, że wszystkie funkcje A_m takie, że $A_m(n) = A(m, n)$ są pierwotnie rekurencyjne.

Zad. 4. Pokaż, że funkcja Ackermanna jest rosnąca względem każdej zmiennej.

Zad. 5. Udowodnij, że dla każdej funkcji pierwotnie rekurencyjnej f istnieje liczba naturalna m taka, że

$$f(x_1, \dots, x_k) < A(m, \max\{x_1, \dots, x_k\})$$

dla wszystkich liczb naturalnych $x_1, \dots, x_k$. Wskazówka: dowodzimy to przez indukcję ze względu na stopień złożoności definicji f .

Zad. 6. Udowodnij, że funkcja Ackermanna nie jest pierwotnie rekurencyjna w przeciwieństwie do wszystkich funkcji A_m takich, że $A_m(n) = A(m, n)$.

Zad. 7. Udowodnij, że funkcja Ackermanna jest rekurencyjna. Wskazówka: Zdefiniuj najpierw relację $R(a, m, n)$ stwierdzającą, że a koduje dostatecznie duży fragment wykresu funkcji A pozwalający na ustalenie i zweryfikowanie wartości $A(m, n)$. Następnie pokaż, że R jest relacją rekurencyjną i zdefiniuj A używając R i operacji minimum.

Zad. 8. Pokaż, że jeżeli funkcje g_0 , g_1 oraz h są pierwotnie rekurencyjne, to także funkcja f zdefiniowana równościami

$$f(\vec{x}, 0) = g_0(\vec{x}), \quad f(\vec{x}, 1) = g_1(\vec{x}), \quad f(\vec{x}, n+2) = h(f(\vec{x}, n), f(\vec{x}, n+1), n, \vec{x})$$

jest pierwotnie rekurencyjna. W szczególności, pierwotnie rekurencyjna jest funkcja przyporządkowująca liczbie n wyraz F_n ciągu Fibonacciego.

Zad. 9. Pokaż, że jeżeli funkcje g_1 , g_2 , h_1 oraz h_2 są pierwotnie rekurencyjne, to także funkcje f_1 i f_2 zdefiniowana równościami

$$f_1(\vec{x}, 0) = g_1(\vec{x}), \quad f_1(\vec{x}, n + 1) = h_1(f_1(\vec{x}, n), f_2(\vec{x}, n), n, \vec{x})$$

$$f_2(\vec{x}, 0) = g_2(\vec{x}), \quad f_2(\vec{x}, n + 1) = h_2(f_1(\vec{x}, n), f_2(\vec{x}, n), n, \vec{x})$$

są pierwotnie rekurencyjne. Wywnioskuj stąd, że funkcje **div** i **mod** są pierwotnie rekurencyjne.

Zad. 10. Pokaż, że jeżeli funkcje g , oraz h są pierwotnie rekurencyjne, to także funkcja f zdefiniowana równościami

$$f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}) \quad \text{oraz} \quad f(\vec{x}, n) = h(f(\vec{x}, (n)_0), f(\vec{x}, (n)_1), n, \vec{x}) \quad \text{dla } n > 0$$

jest pierwotnie rekurencyjna.

Zad. 11. Pokaż, że jeżeli funkcje g , h oraz k są pierwotnie rekurencyjne, to także funkcja f zdefiniowana równościami

$$f(x, 0) = g(x) \quad \text{oraz} \quad f(x, n + 1) = h(f(k(x, n), n), n, x)$$

jest pierwotnie rekurencyjna.

Zad. 12. Pokaż, że jeżeli funkcje g , h , k_0 oraz k_1 są pierwotnie rekurencyjne, to także funkcja f zdefiniowana równościami

$$f(x, 0) = g(x) \quad \text{oraz} \quad f(x, n) = h(f(k_0(x, n), (n)_0), f(k_1(x, n), (n)_1), n, x) \quad \text{dla } n > 0$$

jest pierwotnie rekurencyjna.

Zad. 13. Pokaż, że jeżeli funkcja g jest pierwotnie rekurencyjna, to także funkcja f zdefiniowana równościami

$$f(0, x) = g(x) \quad \text{oraz} \quad f(n, x) = f((n)_0, f((n)_1, x)) \quad \text{dla } n > 0$$

jest pierwotnie rekurencyjna.