

Funkcja Steinhausa - Mosera

Zad. 1. Przyjmijmy, że

$$M(n, 1, 3) = n^n, \quad M(n, 1, p+1) = M(n, n, p), \quad M(n, m+1, p) = M(M(n, 1, p), m, p).$$

Udowodnij, że te trzy równości definiują funkcję rekurencyjną. Znajdź dziedzinę tej funkcji. Czy jest to funkcja pierwotnie rekurencyjna (dziedzinę można poprawić!)? Funkcja ta bywa nazywana funkcją Steinhausa - Mosera.

1 Własności funkcji Steinhausa - Mosera

Lemat 1.1 *Funkcja Steinhausa - Mosera jest określona dla wszystkich trójek ze zbioru $\{(n, m, p) \in N^3 : n \geq 1 \wedge m \geq 1 \wedge p \geq 3\}$.* $\square$

Lemat 1.2 *Dla wszystkich $m \geq 1$ i $p \geq 3$ mamy $M(1, m, p) = 1$.*

Dowód. Najpierw przez indukcję ze względu na m pokazujemy, że jeżeli $M(1, 1, p) = 1$, to dla wszystkich $m \geq 1$ zachodzi równość $M(1, m, p) = 1$.

Pierwszy krok tego dowodu indukcyjnego jest oczywisty. Ponadto, jeżeli $M(1, m, p) = 1$, to także

$$M(1, m+1, p) = M(M(1, 1, p), m, p) = M(1, m, p) = 1.$$

Teraz, aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że równość $M(1, 1, p) = 1$ zachodzi dla wszystkich $p \geq 3$. To również dowodzimy przez indukcję. Dla $p = 3$ mamy

$$M(1, 1, 3) = 1^1 = 1$$

i bez trudu zauważamy, że

$$M(1, 1, p+1) = M(1, 1, p). \quad \square$$

1.1 Monotoniczność ze względu na pierwszą zmienną

Będziemy rozważać funkcje naturalne określone dla argumentów ≥ 1 i przyjmując wartości ≥ 1 . W takim przypadku przytoczone własności będzie uważać za domyślne założenia. Dla takich funkcji mamy w szczególności

Lemat 1.3 *Złożenie funkcji rosnących jest funkcją rosnącą.* $\square$

Lemat 1.4 *Jeżeli f jest funkcją rosnącą, to $n \leq f(n)$ dla wszystkich $n \geq 1$. Jeżeli dodatkowo założymy, że $2 < f(2)$, to dla wszystkich $n \geq 2$ zachodzi także nierówność $n < f(n)$.* $\square$

Przyjmijmy, że dla $m \geq 1$ i $p \geq 3$ funkcja $M_{m,p}$ jest definiowana wzorem

$$M_{m,p}(n) = M(n, m, p).$$

Fakt 1.5 Z wzoru $M(n, m+1, p) = M(M(n, 1, p), m, p)$ wynika, że funkcja $M_{m+1,p}$ jest złożeniem $M_{m,p} \circ M_{1,p}$ funkcji $M_{m,p}$ i $M_{1,p}$. W szczególności mamy

$$M_{m+1,p}(n) = M_{m,p}(M_{1,p}(n)).$$

Wniosek 1.6 *Dla dowolnego $p \geq 3$, jeżeli funkcja $M_{1,p}$ jest rosnąca, to dla $m \geq 1$ wszystkie funkcje $M_{m,p}$ są rosnące.*

Dowód. Z powyższego faktu bez trudu wyprowadzamy wniosek korzystając z zasady indukcji i wcześniejszego lematu o złożeniu funkcji rosnących. $\square$

Lemat 1.7 *Jeżeli dla pewnego $p \geq 3$ funkcja $M_{1,p}$ jest rosnąca, to także funkcja $M_{1,p+1}$ jest rosnąca.*

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} M_{1,p+1}(n+1) &= M(n+1, 1, p+1) = M(n+1, n+1, p) = M_{n+1,p}(n+1) = \\ &= M_{n,p}(M_{1,p}(n+1)) \geq M_{n,p}(n+1) > M_{n,p}(n) = M(n, n, p) = \\ &= M(n, 1, p+1) = M_{1,p+1}(n). \end{aligned}$$

Wykazana nierówność świadczy o tym, że funkcja $M_{1,p+1}$ jest rosnąca. $\square$

Wniosek 1.8 *Dla dowolnych $m \geq 1$ i $p \geq 3$ wszystkie funkcje $M_{m,p}$ są rosnące.* $\square$

1.2 Monotoniczność ze względu na pozostałe zmienne

Lemat 1.9 *Dla $p \geq 3$ wartość $M(2, 1, p)$ jest słabo rosnącą funkcją p . W szczególności, dla wszystkich takich p mamy $M_{1,p}(2) = M(2, 1, p) \geq M(2, 1, 3) = 4$.*

Dowód. Zauważmy, że

$$M(2, 1, p+1) = M(2, 2, p) = M(M(2, 1, p), 1, p) \geq M(2, 1, p)$$

na mocy poprzedniego wniosku i lematu 1.4. Druga część tezy jest oczywistym wnioskiem z pierwszej części. $\square$

Lemat 1.10 *Dla wszystkich $p \geq 3$ oraz $n > 1$ wyrażenie $M(n, m, p)$ jest rosnącą funkcją zmiennej m .*

Dowód. Zauważmy, że

$$M(n, m+1, p) = M_{m+1,p}(n) = M_{m,p}(M_{1,p}(n)) > M_{m,p}(n) = M(n, m, p).$$

Nierówność w powyższym wzorze jest konsekwencją monotoniczności funkcji $M_{m,p}$ i wynika z lematu 1.4 na podstawie poprzedniego. $\square$

Lemat 1.11 *Dla wszystkich $m \geq 1$ oraz $n > 1$ wyrażenie $M(n, m, p)$ jest rosnącą funkcją zmiennej p .*

Dowód. Udowodnimy przez indukcję ze względu na m , że zwiększając p o 1 zwiększamy wartość wyrażenia $M(n, m, p)$.

Dla $m = 1$ korzystamy z poprzedniego lematu. Mamy więc

$$M(n, 1, p) < M(n, n, p) = M(n, 1, p+1).$$

Drugi krok indukcyjny wynika z następujących rachunków:

$$\begin{aligned} M(n, m+1, p+1) &= M(M(n, 1, p+1), m, p+1) > M(M(n, 1, p), m, p+1) > \\ &> M(M(n, 1, p), m, p) = M(n, m+1, p). \end{aligned}$$

Pierwsza nierówność wynika z nierówności wykazanej w pierwszym kroku indukcyjnym i z wniosku 1.8, druga – z założenia indukcyjnego. $\square$

1.3 Pewna własność

Lemat 1.12 Dla wszystkich $m, n \geq 1$ oraz $p \geq 3$ zachodzi wzór

$$M(M(n, 1, p), m, p) = M(M(n, m, p), 1, p).$$

Dowód. Lemat dowodzimy przez indukcję ze względu na m . Dla $m = 1$ wzór jest oczywisty. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} M(M(n, m+1, p), 1, p) &= M(M(M(n, m, p), 1, p), 1, p) = \\ &= M(M(M(n, 1, p), m, p), 1, p) = M(M(n, 1, p), m+1, p). \quad \square \end{aligned}$$

1.4 Funkcja Ackermanna

Udowodnione własności funkcji m pozwalają porównać ją z funkcją Ackermanna. Przypomnijmy więc równości definiujące funkcję Ackermanna $A : N^2 \rightarrow N$. Są to następujące równości

$$A(0, n) = n+1, \quad A(m+1, 0) = A(m, 1) \quad \text{oraz} \quad A(m+1, n+1) = A(m, A(m+1, n)).$$

Nietrudno zauważyć, że wartość $A(3, m)$ dana jest wzorem

$$A(3, n) = 2^{n+3} - 3.$$

1.5 Związek z funkcją Ackermanna

Twierdzenie 1.13 Dla wszystkich liczb naturalnych n i wszystkich naturalnych $m \geq 3$ zachodzi nierówność

$$m + A(m, n) < M(m + n, 1, m).$$

Dowód. Nierówność tę dowiedzimy przez indukcję ze schematem, który został wykorzystany w definicji funkcji Ackermanna.

Pierwszy krok: najpierw nierówność dowodzimy dla $m = 1$ i $p = 3$. Oczywiście mamy

$$3 + A(3, n) = 2^{n+3} < (n+3)^{n+3} = M(n+3, 1, 3).$$

Drugi krok:

$$m+1 + A(m+1, 0) = m+1 + A(m, 1) < 1 + M(m+1, 1, m) \leq M(m+1, 1, m+1)$$

Trzeci krok, założenia:

$$m + A(m, n) < M(m + n, 1, m) \quad \text{dla wszystkich } n \in N$$

$$m+1 + A(m+1, n) < M(m + n + 1, 1, m+1).$$

Teza:

$$m+1 + A(m+1, n+1) < M(m + n + 2, 1, m+1).$$

Dowód:

$$\begin{aligned} m+1 + A(m+1, n+1) &= m+1 + A(m, A(m+1, n)) < 1 + M(m + A(m+1, n), 1, m) \leq \\ &\leq 1 + M(M(m + n + 1, 1, m+1), 1, m) < M(M(m + n + 1, m + n + 1, m), 1, m) = \\ &= M(M(m + n + 1, 1, m), m + n + 1, m) = M(m + n + 1, m + n + 2, m) < \\ &< M(m + n + 2, m + n + 2, m) = M(m + n + 2, 1, m+1) \end{aligned}$$