

Pierwsze prace dotyczące kwantyfikatorów zostały napisane przez Fregego (1879) i Peirce'a (1885). W tej drugiej pracy kwantyfikatory zaczęły być oznaczane symbolami $\sum$ i $\prod$ i ta symbolika utrzymywała się dość długo.

1 Reguły dowodzenia

1.1 System dowodów założeniowych

Reguła odrywania (RO):

$$\frac{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}{\psi}.$$

Reguły dotyczące koniunkcji:

$$\frac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}, \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}, \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}.$$

Reguły dotyczące alternatywy:

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}, \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}, \quad \frac{\varphi \vee \psi, \neg \varphi}{\psi}.$$

Reguły dotyczące równoważności:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \psi, \psi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Leftrightarrow \psi}, \quad \frac{\varphi \Leftrightarrow \psi}{\varphi \Rightarrow \psi}, \quad \frac{\varphi \Leftrightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \varphi}.$$

Reguły dotyczące kwantyfikatora ogólnego (pierwsza to reguła dołączania (DO) tego kwantyfikatora, druga – opuszczania):

$$\frac{\varphi}{\forall x \varphi}, \quad \frac{\forall x \varphi}{\varphi[x \leftarrow t]}.$$

Reguły dotyczące kwantyfikatora egzystencjalnego:

$$\frac{\varphi[x \leftarrow t]}{\exists x \varphi}, \quad \frac{\exists x \varphi}{\varphi[x \leftarrow c]}.$$

W ewentualnych rozszerzeniach systemu mogą się pojawić kolejne reguły: np. reguły wtórne (jeżeli $\varphi \Rightarrow \psi$ jest twierdzeniem, to $\frac{\varphi}{\psi}$ jest regułą wtórną), reguły dotyczące definicji oraz równości, np. $\frac{\varphi, t = s}{\varphi[t/s]}$, pozwalająca pewne wystąpienie termu t w formule φ zastąpić równym termem s .

1.2 System logiczny z książki Schoenfelda

W tym systemie posługujemy się dwoma spójnikami $\vee$ oraz $\neg$, i kwantyfikatorem $\exists$. Formułę zapisaną za pomocą innych znaków uważamy za skrót i najpierw przekształcamy po to, by wyeliminować niewłaściwe znaki. Pełny system jest systemem z równością, jego aksjomaty wyrażają również własności równości.

1) Aksjomaty:

$$\neg\varphi \vee \varphi, \quad \varphi[x \leftarrow t] \Rightarrow \exists x\varphi, \quad x = x,$$

$$x_1 = y_1 \Rightarrow (\dots \Rightarrow (x_n = y_n \Rightarrow (f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n))) \dots),$$

$$x_1 = y_1 \Rightarrow (\dots \Rightarrow (x_n = y_n \Rightarrow (p(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow p(y_1, \dots, y_n))) \dots).$$

2) Reguły dowodzenia:

$$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}, \quad \frac{\varphi \vee \varphi}{\varphi}, \quad \frac{\varphi \vee (\psi \vee \xi)}{(\varphi \vee \psi) \vee \xi}, \quad \frac{\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee \xi}{\psi \vee \xi}, \quad \frac{\varphi \Rightarrow \psi}{(\exists x\varphi) \Rightarrow \psi}$$

(pod warunkiem, że x nie jest zmienną wolną w ψ).

1.3 System logiczny Łukasiewicza

To system formalizujący rachunek zdań, a więc bez kwantyfikatorów. Mamy dwa spójniki pierwotne $\Rightarrow$ oraz $\neg$ i definicje pozostałych spójników:

$$\varphi \vee \psi := (\neg\varphi) \Rightarrow \psi,$$

$$\varphi \wedge \psi := \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)),$$

$$\varphi \Leftrightarrow \psi := (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi).$$

1) Aksjomaty:

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\xi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\xi \Rightarrow \psi)), \quad (\neg\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi, \quad \varphi \Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \psi).$$

2) Reguły dowodzenia:

$$\frac{\varphi := \psi, \xi}{\xi[\psi//\varphi]}, \quad \frac{\varphi}{\varphi[p \leftarrow \psi]},$$

reguła odrywania RO.

1.4 System logiczny z pracy Gödla

Gödel korzysta z dwóch spójników $\neg$ i $\vee$ oraz kwantyfikatora $\forall$. Dopuszcza także stosowanie skrótów, np. formułę ze spójnikiem $\Rightarrow$ uważa za skróconą wersję znanej formuły z definicji implikacji. Posługuje się jednak bardzo skomplikowanym systemem, który jakoś się wiąże z *Principia Mathematica* Bertranda Russella i łączy w sobie logikę, arytmetykę i teorię mnogości. Pojęcie równości jest w nim definiowane w pewien sposób w oparciu o zasadę: dwie liczby naturalne są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają identyczne własności. W rachunku kwantyfikatorów Gödel posługiwał się zapisami $x \amalg \varphi$ oraz $(Ex)\varphi$. Dalej przedstawiam część logiczną tego systemu.

1) Aksjomaty:

$$\varphi \Rightarrow \varphi \vee \varphi, \quad \varphi \vee \varphi \Rightarrow \varphi, \quad \varphi \vee \psi \Rightarrow \psi \vee \varphi, \quad (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\xi \vee \varphi \Rightarrow \xi \vee \psi),$$

$$(\forall x\varphi) \Rightarrow \varphi[x \leftarrow t], \quad (\forall x(\varphi \vee \psi)) \Rightarrow (\varphi \vee (\forall x\psi))$$

(ten ostatni pod warunkiem, że zmienna x nie jest wolna w φ).

2) Reguły dowodzenia: reguła odrywania RO i dołączania kwantyfikatora ogólnego DO.

2 Pojęcie dowodu i twierdzenia

2.1 Podstawowa idea

Dowodem nazywamy ciąg formuł $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ taki, że każda z formuł jest albo aksjomatem, albo wnioskiem otrzymanym z formuł wcześniejszych za pomocą jednej z reguł dowodzenia.

Twierdzeniami nazywamy formuły występujące w dowodach. Napis $\vdash \varphi$ oznacza, że formuła φ jest twierdzeniem (rozważanego) systemu logicznego. Dowodzi się jednak, że pojęcie twierdzenia nie zależy od systemu logicznego (pod warunkiem, że jest to dobry system formalizujący logikę klasyczną). Tak rozumiane twierdzenia nazywa się także prawami rachunku kwantyfikatorów (ewentualnie rachunku zdań), bądź tezami tych rachunków.

Zbiór twierdzeń można też zdefiniować jako najmniejszy zbiór formuł zawierający aksjomaty i zamknięty ze względu na reguły wnioskowania (jeżeli przesłanki należą do zbioru twierdzeń, to także wnioski otrzymane za pomocą reguł wnioskowania należą do zbioru twierdzeń).

W podany sposób definiujemy dowody i twierdzenia w systemie z książki Schoenfelda, systemie Łukasiewicza i z pracy Gödla.

Będziemy także rozważać teorie i twierdzenia teorii. Pojęcie teorii będziemy utożsamiać ze zbiorem formuł, formuły z tego zbioru nazywamy aksjomatami teorii (ewentualnie pozalogicznymi w odróżnieniu od aksjomatów logicznych). Dowodząc w pewnej teorii w dowodach możemy umieszczać wszelkie aksjomaty tej teorii, logiczne i pozalogiczne. Aby wyrazić fakt, że φ jest twierdzeniem teorii T , będziemy pisać $T \vdash \varphi$.

2.2 Dowody założeniowe

Przypuśćmy, że chcemy dowieść formułę ρ , którą udało się przedstawić w postaci

$$\varphi_1 \Rightarrow \dots (\varphi_n \Rightarrow \psi).$$

Wtedy możemy przyjąć, że $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ są założeniami dowodu, ψ jest tezą, a $\neg\psi$ jest założeniem dowodu nie wprost.

W systemie założeniowym wszystkie reguły dotyczące kwantyfikatorów mogą być stosowane po spełnieniu pewnych – nie sformułowanych tutaj – warunków.

Dowodem wprost nazywamy ciąg $\psi_1, \dots, \psi_m$ formuł, w którym każda formuła jest albo aksjomatem (logicznym i ewentualnie pozalogicznym), albo założeniem (ale nie założeniem dowodu nie wprost), albo wcześniej udowodnionym twierdzeniem, albo też wnioskiem z formuł poprzednich.

Dowodem nie wprost nazywamy ciąg $\psi_1, \dots, \psi_m$ formuł, w którym każda formuła jest albo aksjomatem, albo założeniem, w tym założeniem dowodu nie wprost, albo wcześniej udowodnionym twierdzeniem, albo też wnioskiem z formuł poprzednich.

Dowodem wprost formuły ρ nazywamy dowód wprost, w którym znajduje się formuła ψ . Dowodem nie wprost formuły ρ nazywamy dowód nie wprost, w którym znajduje się pewna formuła γ i jej zaprzeczenie $\neg\gamma$.

Formuła ρ jest twierdzeniem, jeżeli ma dowód wprost lub dowód nie wprost.

3 Szczegóły

Dalsze szczegóły wymagają wprowadzenia kilku drobnych pojęć.

3.1 Zasięg kwantyfikatora, zmienne wolne i związane

Rozważamy teraz formuły rozumiane jako ciągi znaków: zmiennych, symboli funkcyjnych i relacyjnych, stałych, spójników logicznych i kwantyfikatorów, przecinków i nawiasów.

Nietrudno zauważyć, że w każdej formule po każdym kwantyfikatorze (znaku $\forall$ lub $\exists$) znajduje się zmienna. Jeżeli po pewnym kwantyfikatorze znajduje się zmienna x , to o tym kwantyfikatorze mówimy, że wiąże zmienną x .

Zasięgiem kwantyfikatora (czyli znaku $\forall$ lub $\exists$ znajdującego się w określonym miejscu) w formule ψ nazywamy pewien fragment (podśłowo) formuły ψ , zdefiniowany zgodnie z następującymi regułami:

- 1) jeżeli formuła ψ ma jedną z postaci: $\neg\varphi_1$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, oraz kwantyfikator ten występuje w formule φ_1 (odpowiednio: w φ_2), to jego zasięgiem w ψ jest jego zasięg w φ_1 (lub odpowiednio: φ_2),
- 2) jeżeli formuła ψ jest postaci $\exists x\varphi$ lub $\forall x\varphi$ i interesujący nas kwantyfikator występuje w φ , to jego zasięgiem w ψ jest jego zasięg w φ ,
- 3) jeżeli formuła ψ jest postaci $\exists x\varphi$ lub $\forall x\varphi$ i interesujący nas kwantyfikator jest pierwszym znakiem ψ , to jego zasięgiem w ψ jest formuła φ .

Wystąpienie zmiennej x w formule ψ jest związane, jeżeli znajduje się w zasięgu pewnego kwantyfikatora wiążącego zmienną x . Pozostałe wystąpienia zmiennej x w formule ψ nazywamy wolnymi.

Formułę nazywamy zdaniem, jeżeli żadna zmienna nie występuje w niej jako wolna.

3.2 Dokończenie definicji systemów logicznych

Mówimy, że term t jest podstawialny w formule φ za zmienną x , jeżeli żadne wolne w φ wystąpienie zmiennej x nie znajduje się w zasięgu kwantyfikatora wiążącego jakąkolwiek zmienną występującą w termie t .

We wszystkich opisanych wyżej systemach logicznych, aksjomaty i reguły dowodzenia zawierających wyrażenie postaci $\varphi[x \leftarrow t]$ mogą być stosowane w systemie pod warunkiem, że term t jest podstawialny w formule φ za zmienną x .

W systemie założeniowym, regułę dołączania kwantyfikatora ogólnego DO, która jest postaci $\frac{\varphi}{\forall x\varphi}$, stosujemy tylko wtedy, gdy zmienna x nie jest wolna w założeniach dowodu. W pozostałych systemach możemy stosować regułę DO bez ograniczeń

Regułę opuszczania kwantyfikatora szczegółowego (egzystencjalnego) $\frac{\exists x\varphi}{\varphi[x \leftarrow c]}$ w systemie założeniowym stosujemy w następujący sposób:

- 1) term c jest postaci $f(x_1, \dots, x_n)$, gdzie f jest symbolem funkcyjnym, a $x_1, \dots, x_n$ są wszystkimi zmiennymi różnymi od x , które występują jako wolne w formule φ ,
- 2) symbol funkcyjny f nie występuje ani w aksjomatach, ani w dowodzonej formule, ani w napisanym już fragmencie dowodu.

4 Spełnianie (prawdziwość) formuł

Strukturą nazywamy zbiór A (zwany uniwersum) z wyróżnionymi elementami, funkcjami wieloargumentowymi przekształcającymi A w A i relacjami w zbiorze A (także wieloargumentowymi). Jeżeli mamy dany pewien język (a więc zbiór symboli), to rozważamy struktury dla tego języka. Są to struktury, w których jest określone znaczenie wszystkich symboli języka. Znaczeniem stałej jest element uniwersum struktury, znaczeniem symbolu funkcyjnego – funkcja, a symbolu relacyjnego – relacja, o odpowiedniej (w obu przypadkach) liczbie argumentów.

Wartościowaniem zmiennych w strukturze o uniwersum A nazywamy dowolną funkcję przyporządkowującą zmiennym elementy zbioru A .

Symbolem $t[h]$ oznaczamy wartość termu t przy wartościowaniu h . Pojęcie to definiujemy wzorami

$$t[h] = \begin{cases} C & \text{jeżeli } t = c, \\ h(x) & \text{jeżeli } t \text{ jest zmienną } x, \\ F(t_1[h], \dots, t_n[h]) & \text{jeżeli } t = f(t_1, \dots, t_n), \end{cases}$$

gdzie c jest stałą, a C jest znaczeniem tej stałej w rozważanej strukturze oraz f jest n -argumentowym symbolem funkcyjnym, a F – znaczeniem tego symbolu w tej strukturze.

Mówimy, że formuła φ jest spełniona w strukturze $\mathcal{A}$ przy wartościowaniu h (z zapisie symbolicznym: $\mathcal{A} \models \varphi[h]$), jeżeli

- 1) $\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$ oraz $(t_1[h], \dots, t_n[h]) \in R$, gdzie R jest relacją w strukturze $\mathcal{A}$ odpowiadającą symbolowi relacyjnemu r ,
- 2) $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ oraz jedna z formuł φ_1 lub φ_2 jest spełniona w strukturze $\mathcal{A}$ przy wartościowaniu h ($\mathcal{A} \models \varphi_1[h]$ lub $\mathcal{A} \models \varphi_2[h]$),
- 3) $\varphi = \neg\psi$ oraz formuła ψ nie jest spełniona w strukturze $\mathcal{A}$ przy wartościowaniu h ($\mathcal{A} \not\models \varphi_1[h]$),
- 4) $\varphi = \exists x\psi$ oraz w strukturze $\mathcal{A}$ jest spełniona formuła ψ przy pewnym wartościowaniu h' takim, że $h'(y) = h(y)$ dla wszystkich zmiennych $y \neq x$ ($\mathcal{A} \models \psi[h']$).

Formuła φ jest spełniona w strukturze $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \models \varphi$), jeżeli jest spełniona w tej strukturze przy każdym wartościowaniu.

Zdanie spełnione w pewnej strukturze przy pewnym wartościowaniu jest w tej strukturze spełnione.

Teorią nazywamy dowolny zbiór formuł. Elementy teorii T nazywamy aksjomatami teorii T .

Struktura $\mathcal{A}$ jest modelem teorii T ($\mathcal{A} \models T$), jeżeli każdy aksjomat teorii T jest spełniony w strukturze $\mathcal{A}$.

4.1 Twierdzenie Gödla o pełności (1929)

Twierdzenie 4.1 (o poprawności) *Jeżeli $\mathcal{A}$ jest modelem T , a φ jest twierdzeniem teorii T , to formuła φ jest spełniona w strukturze $\mathcal{A}$.*

Twierdzenie 4.2 (o pełności) *Jeżeli formuła φ jest spełniona w każdym modelu teorii T , to φ daje się dowieść w teorii T .*

4.2 Przykłady teorii

Dobrym przykładem pozwalającym łatwo znajdować różne przykłady jest teoria grup, czyli teoria zapisana za pomocą symboli $\cdot$, $^{-1}$ oraz 1 , złożona z następujących aksjomatów:

- 1) $\forall x \forall y \forall z ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$,
- 2) $\forall x (x \cdot 1 = x \wedge 1 \cdot x = x)$,
- 3) $\forall x (x \cdot x^{-1} = 1 \wedge x^{-1} \cdot x = 1)$.

Ważnymi przykładami będą różne arytmetyki, na przykład teoria złożona z następujących aksjomatów:

- 1) $\forall x (x + 1 \neq 0)$,
- 2) $\forall x \forall y (x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y)$,
- 3) $\forall x (x + 0 = x)$,
- 4) $\forall x \forall y (x + (y + 1) = (x + y) + 1)$,
- 5) $\forall x (x \cdot 0 = 0)$,
- 6) $\forall x \forall y (x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x)$,
- 7) $\forall x (\neg x < 0)$,
- 8) $\forall x \forall y (x < y + 1 \Leftrightarrow x < y \vee x = y)$,
- 9) $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$.

Po dopisaniu do tej listy wszystkich aksjomatów indukcji (czyli schematu indukcji)

$$(\varphi[x \leftarrow 0] \wedge \forall x (\varphi \Rightarrow \varphi[x \leftarrow x + 1])) \Rightarrow \forall x \varphi$$

otrzymujemy arytmetykę Peano. Jest to podstawowy zbiór aksjomatów arytmetycznych, właściwie jedyny używany.

Z historycznego punktu widzenia ważne są teoria mnogości Zermelo-Fraenkla (ZF) oraz Principia Mathematica Bertranda Russela, będące mnogościowym rozszerzeniem arytmetyki.

4.3 Rodzaje teorii

Teoria T jest sprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła φ taka, że $T \vdash \varphi$ oraz $T \vdash \neg \varphi$.

Teoria T jest niesprzeczna, jeżeli nie jest sprzeczna.

Teoria T jest zupełna, jeżeli dla każdego zdania φ albo $T \vdash \varphi$, albo $T \vdash \neg \varphi$.

Lemat 4.3 *Jeżeli $\mathcal{A}$ jest strukturą, to teoria struktury $\mathcal{A}$, czyli*

$$\{\varphi : \varphi \text{ jest zdaniem oraz } \mathcal{A} \models \varphi\},$$

jest niesprzeczna i zupełna.

Lemat 4.4 *Następujące warunki są równoważne:*

- 1) *teoria T jest sprzeczna,*
- 2) *istnieje zdanie φ takie, że $T \vdash \varphi \wedge \neg \varphi$,*
- 3) *każda formuła jest twierdzeniem teorii T .*