Zadanie 102

Antoni Kościelski

26 listopada 2021

1 Treść zadania

Dla wartościowań σ_1 i σ_2 oznaczmy przez $\sigma_1 \sqcap \sigma_2$ wartościowanie zadane wzorem

$$\sigma_1 \sqcap \sigma_2(q) = \begin{cases} T, & \text{gdy } \sigma_1(q) = \sigma_2(q) = T, \\ F, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zadanie 1.1 Udowodnij, że jeżeli formuła φ jest hornowska, $\sigma_1 \models \varphi$ oraz $\sigma_2 \models \varphi$, to także $\sigma_1 \sqcap \sigma_2 \models \varphi$.

2 Przypomnienie definicji

2.1 Klauzule hornowskie

Zadanie dotyczy formuł hornowskich. Zgodnie z definicją są to koniunkcje klauzul hornowskich. Aby rozumieć tę definicję, trzeba więc wiedzieć, co to są klauzule. Są to alternatywy literałów, czyli zmiennych zdaniowych i ich negacji. Klauzulę nazywamy hornowską, jeżeli najwyżej jeden z występującej w niej literałów jest pozytywny, czyli jest zmienną zdaniową, a nie zanegowaną zmienną zdaniową.

Koniunkcje i alternatywy, o których mowa w przytoczonej definicji, nie są zwykłymi spójnikami. Są to koniunkcje i alternatywy wieloczłonowe. Mamy następujące rodzaje klauzul hornowskich:

1) $\perp$, czyli alternatywa, która nie ma członów, patrz str. w Materiałach do zajęć,

2) zmienne zdaniowe p, negacje zmiennych $\neg p$, czyli alternatywy jednoczłonowe oraz alternatywy $\neg p \vee q$, czyli pewien rodzaj dwuczłonowych,

3) alternatywy postaci

$$\bigvee_{n=1}^{n} \neg p_i, \quad \text{czyli} \quad \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n$$

gdzie $n > 1$, a p_i są zmiennymi zdaniowymi, są to alternatywy o przynajmniej dwóch członach,

4) alternatywy postaci

$$\left(\bigvee_{n=1}^{n} \neg p_i \right) \vee q \; = \; (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n) \vee q$$

gdzie $n > 1$, a p_i oraz q są zmiennymi zdaniowymi, są to alternatywy o przynajmniej trzech członach.

Przytoczony wykaz klauzul nie do końca jest definicją, choć dobrze ją oddaje. Użyte w nim wieloczłonowe alternatywy są rzeczywiście wieloczłonowe, mają przynajmniej dwa człony.

Z Materiałów do zajęć wynika też, że część klauzul hornowskich można zapisać w postaci

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i \Rightarrow q,$$

gdzie $p_1, \ldots, p_n$ oraz q to zmienne zdaniowe. Ta formuła nie jest alternatywą.

Zgodnie z definicją, klauzule (także formuły) hornowskie są to formuły mające określoną postać. Nie powinny więc zawierać implikacji. Postać formuły to jeden z elementów sytuacji. Drugim są własności przysługujące formułom o interesującej nas postaci, na przykład taka, jak własność formuł hornowskich z zadania 102. Zwykle interesują nas dwa pytania: jakie własności mają interesujące nas formuły oraz jaką postać można nadać formułom mającym rozważane własności. Te własności często są takie, że wraz z formułą φ przysługują także formułom równoważnym z φ. Tak jest na przykład dla własności z zadania 102. W takim przypadku możemy mówić np. o formułach hornowskich w szerszym sensie, które nie muszą mieć charakterystycznej postaci, ale są równoważne takim formułom. W tym sensie przytoczoną implikację można uważać za klauzulę hornowską.

2.2 Formuły hornowskie

Formuły hornowskie są zgodnie z definicją koniunkcjami klauzul hornowskich. Mamy więc trzy rodzaje takich formuł:

1) $\top$, czyli koniunkcja pozbawiona członów,

2) klauzule hornowskie, czyli jednoczłonowe koniunkcje klauzul,

3) koniunkcje klauzul hornowskich, przynajmniej dwuczłonowe.

2.3 Spełnianie przy danym wartościowaniu

Zgodnie z definicją, wartościowanie σ spełnia formułę φ, czyli

$$\sigma \models \varphi \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \widehat{\sigma}(\varphi) = T,$$

a więc wtedy, gdy T jest wartością logiczną formuły φ przy wartościowaniu σ.

3 Rozwiązanie zadania dla klauzul hornowskich

3.1 Pierwsze rozwiązanie

Mamy więc klauzulę hornowską φ i dwa wartościowania σ_1 i σ_2, dla których formuła φ ma wartość logiczną T. Mamy wyliczyć wartość logiczną formuły φ przy wartościowaniu $\sigma_1 \sqcap \sigma_2$. Będziemy rozważać dwa przypadki.

Przypadek 1: Pewien negatywny literał w φ jest prawdziwy.

Dokładniej, zakładamy, że pewien literał będący członem klauzuli φ, a także negacją zmiennej zdaniowej jest spełniony przy wartościowaniu $\sigma_1 \sqcap \sigma_2$. Jeżeli człon alternatywy (także wieloczłonowej) jest spełniony przy pewnym wartościowaniu, to przy tym wartościowaniu również jest spełniona cała alternatywa. Stąd otrzymujemy tezę, czyli stwierdzenie, że $\widehat{\sigma_1 \sqcap \sigma_2}(\varphi) = T$, które może też zostać zapisane w postaci $\sigma_1 \sqcap \sigma_2 \models \varphi$.

Przypadek 2: Żaden negatywny literał w φ nie jest prawdziwy.

Weźmy dowolny negatywny literał $\neg p$ będący członem φ. W tym przypadku, wartość logiczna $\neg p$ przy wartościowaniu $\sigma_1 \sqcap \sigma_2$ jest równa F. Stąd mamy $\sigma_1 \sqcap \sigma_2(p) = T$, a z definicji operacji $\sqcap$ otrzymujemy, że $\sigma_1(p) = \sigma_2(p) = T$. Wartość logiczna literału $\neg p$ zarówno przy wartościowaniu σ_1, jak i σ_2 jest więc równa F.

W ten sposób uzasadniliśmy, że żaden negatywny literał w klauzuli φ nie jest spełniony dla żadnego z wartościowań σ_1 i σ_2. Ale dla tych wartościowań klauzula φ jest spełniona (na mocy założenia). Wobec tego, dla obu wartościowań muszą istnieć w klauzuli φ pozytywne literały, czyli zmienne zdaniowe q_1 i q_2 takie, że $\sigma_1(q_1) = \sigma_2(q_2) = T$. W klauzuli hornowskiej najwyżej jeden literał jest pozytywny. Ponieważ klauzula φ jest hornowska, więc q_1 i q_2 to jedna i ta sama zmienna. Dalej będziemy oznaczać ją symbolem q. Spełnione są więc równości $\sigma_1(q) = \sigma_2(q) = T$. Z definicji operacji $\sqcap$ otrzymujemy, że także $\sigma_1 \sqcap \sigma_2(q) = T$. Jeżeli pewien człon alternatywy φ jest spełniony przy wartościowaniu $\sigma_1 \sqcap \sigma_2$, to także cała formuła φ jest spełniona przy tym wartościowaniu.

3.2 Inne rozwiązanie zadania dla klauzul hornowskich

Tym razem wykorzystamy fakt, że klauzule hornowskie można równoważnie zapisać w postaci

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i \Rightarrow q \ \text{ lub } \ \bigwedge_{i=1}^{n} p_i \Rightarrow \bot.$$

Znowu zakładamy, że mamy formułę φ taką, jak wyżej, i dwa wartościowania σ_1 i σ_2, dla których formuła φ ma wartość logiczną T. Liczymy wartość logiczną formuły φ przy wartościowaniu $\sigma_1 \sqcap \sigma_2$.

Formułą φ to implikacja. Jeżeli poprzednik implikacji ma wartość logiczną F, to cała implikacja ma wartość T.

Załóżmy więc, że poprzednik formuły φ, czyli koniunkcja $\bigwedge_{i=1}^{n} p_i$, ma przy wartościowaniu $\sigma_1 \sqcap \sigma_2$ wartość logiczną T. Wtedy wszystkie zmienne zdaniowe $p_1, p_2, \ldots, p_n$ mają przy tym wartościowaniu wartość T, a także tę wartość mają przy wartościowaniach σ_1 oraz σ_2. Stąd otrzymujemy, że poprzednik formuły φ ma też wartość T przy każdym z wartościowań σ_1 oraz σ_2.

Skorzystajmy teraz z założeń zadań. Jeżeli implikacja i jej poprzednik są spełnione przy pewnym wartościowaniu, to spełniony jest też jej następnik. Następnikiem tym nie może być $\bot$, więc musi być pewna zmienna zdaniowa, powiedzmy q. Jeżeli q jest spełniona przy każdym z wartościowań σ_1 oraz σ_2, to jest spełniona też przy wartościowaniu $\sigma_1 \sqcap \sigma_2$.

Implikacja, której następnik jest spełniony przy pewnym wartościowaniu, też jest przy nim spełniona. Stąd T jest wartością logiczną implikacji φ i to kończy dowód.

3.3 Poprzednie rozwiązanie bez wyjaśnień, bardziej formalnie

1) Przyjmijmy, że
$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i \Rightarrow q \text{ lub } \varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i \Rightarrow \bot,$$

2) oraz załóżmy, że $\sigma_1 \models \varphi$ oraz $\sigma_2 \models \varphi$ (założenia dowodu).

3) (Dążymy do pokazania, że $\sigma_1 \sqcap \sigma_2 \models \varphi$.)

4) Załóżmy dodatkowo, że $\sigma_1 \sqcap \sigma_2 \models \bigwedge_{i=1}^{n} p_i$.

   (a) $\sigma_1 \sqcap \sigma_2 \models p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ (z założenia 4 i tabelki $\wedge$)

   (b) $\sigma_1 \models p_i$ oraz $\sigma_2 \models p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ (z 4(a) i definicji $\sqcap$).

   (c) $\sigma_1 \models \bigwedge_{i=1}^{n} p_i$ oraz $\sigma_2 \models \bigwedge_{i=1}^{n} p_i$ (z 4(b) i tabelki $\wedge$)

   (d) Założenie $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i \Rightarrow \bot$ implikuje sprzeczność ($\sigma_1 \models \bot$, z 4c i tabelki $\Rightarrow$).

   (e) $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i \Rightarrow q$ (na mocy 1) i 4(d)).

   (f) $\sigma_1(q) = T$ oraz $\sigma_2(q) = T$ (z 4(c), 4(e) i tabelki $\Rightarrow$).

   (g) $\sigma_1 \sqcap \sigma_2(q) = T$ (z definicji $\sqcap$).

5) $\sigma_1 \sqcap \sigma_2 \models \varphi$ (opuszczenie założenia dodatkowego, na mocy tabelki $\Rightarrow$). □

4 Ostatnia część rozwiązania

Aby dokończyć rozwiązywanie zadania 102 trzeba jeszcze pokazać, że koniunkcja dwóch formuł mających własność rozważaną w tym zadaniu też ma tę własność. Jest to bardzo proste zadanie. Następnie należy uogólnić to na dowolne koniunkcje.

5 Zadania dodatkowe

Zadanie 5.1 Które z poniższych formuł są hornowskie
$$p \vee \neg p \vee p,\ q \vee \neg p \vee p,\ \neg q \vee q \vee \neg p \vee p,\ p \vee \neg q,\ p \vee \neg q \vee p?$$

Zadanie 5.2 Pokaż, że formuła $p \vee q$ nie ma własności z zadania 102.

Zadanie 5.3 Niech φ bedzie formułą mającą własność z zadania 102, czyli taką że
$$\text{jeżeli } \sigma_1 \models \varphi \text{ oraz } \sigma_2 \models \varphi, \text{ to } \sigma_1 \sqcap \sigma_2 \models \varphi$$
dla wszystkich wartościowań σ_1 i σ_2.

Udowodnij, że jeżeli formuła $\varphi \to p \vee q$ jest tautologią, to przynajmniej jedna z formuł $\varphi \to p$ oraz $\varphi \to q$ też jest tautologią (p i q to zmienne zdaniowe). Wsk.: taką tezę chyba należy uzasadniać metodą nie wprost.

Zadanie 5.4 Przyjmijmy, że formuła φ jest taka, jak w poprzednim zadaniu. Uogólnij poprzednie zadanie dowodząc, że jeżeli ψ jest klauzulą taką, że formuła $\varphi \to \psi$ jest tautologią, to jest taka klauzula hornowska χ, że formuły $\varphi \to \chi$ oraz $\chi \to \psi$ są tautologiami.

Zadanie 5.5 Udowodnij, że jeżeli formuła φ ma własność z zadania 5.3, to jest ona równoważna formule hornowskiej. Wsk.: na mocy poprzedniego zadania, klauzule w dowolnej koniunkcyjnej postaci normalnej formuły φ zastępujemy klauzulami hornowskimi.