Kodowanie

Lista nr 5.

Zadanie 1. Znajdź słowa wyznaczone przez wielomian $1 + x_1 + x_2x_3$ przy założeniach, że jest to wielomian trzech lub czterech zmiennych.

Zadanie 2. Znajdź wielomiany wyznaczające słowa 10100110 oraz 1010011010100110.

Zadanie 3. Zauważ, że funkcja $f : Z_2^{m+1} \to Z_2$ wyznacza słowo będące konkatenacją słów wynaczonych przez funkcje $f(\cdot, 0)$ i $f(\cdot, 1) : Z_2^m \to Z_2$.

Zadanie 4. Zauważ, że jeżeli $f : Z_2^{m+1} \to Z_2$ jest wielomianem, to wielomianami są także $f(\cdot, 0)$ oraz $f(\cdot, 1) - f(\cdot, 0)$. Oszacuj stopnie tych wielomianów.

Zadanie 5. Udowodnij, że

$$\mathcal{R}(r + 1, m + 1) = \{(x, x + y) \in Z_2^{m+1} : x \in \mathcal{R}(r + 1, m) \wedge y \in \mathcal{R}(r, m)\}.$$

Zauważ, że podany wzór daje się rozszerzyć do rekurecjnej definicji kodów $\mathcal{R}(\cdot, \cdot)$.

Zadanie 6. Korzystając z poprzedniego zadania znajdź zbiory słów generujących kody $\mathcal{R}(1, 3)$, $\mathcal{R}(1, 5)$ i $\mathcal{R}(2, 5)$.

Zadanie 7. Przypuśćmy, że po przesłaniu słowa $x \in \mathcal{R}(1, 3)$ otrzymaliśmy słowo 01111100. Znajdź słowo x.

Zadanie 8. Przypuśćmy, że chcemy napisać rekurencyjną procedurę (funkcję) $d(m, x)$, która dla danego słowa $x \in Z_2^{2^m}$ zawsze zwraca słowo ze zbioru $\mathcal{R}(1, m)$ i zwraca słowo y spełniające warunek $x \in S_{2^{m-2}-1}(y)$, jeżeli tylko takie słowo y istnieje (chcemy więc napisać procedurę dekodującą dla kodu $\mathcal{R}(1, m)$). Procedura $d(m, x)$ może mieć następującą postać:

...

jeżeli $m > 0$, to

1. przedstaw x jako konkatencję dwóch słów x_1 i x_2 tej samej długości;
2. $y_1 := d(m - 1, x_1)$;
3. $y_2 := d(m - 1, x_2)$;

...

Uzupełnij ten pomysł i udowodnij, że zdefiniowałeś poprawną procedurę dekodującą dla kodu $\mathcal{R}(1, m)$. **Wskazówka:** skorzystaj z wyżej opisanej definicji kodu $\mathcal{R}(r, m)$ i faktu, że minimalna odległość dwóch różnych słów z tego kodu wynosi 2^{m-r}.

Antoni Kościelski, 15 listopada 2000 roku