Kodowanie

Lista nr 3.

Zadanie 1. Udowodnij, że kod powtórzeniowy o słowach nieparzystej długości jest doskonały.

Zadanie 2. Przypuśćmy, że odbiorca otrzymał informację

$$011001010010111011101.$$

Skoryguj występujące w niej błędy zakładając, że została utworzona za pomocą binarnego kodu Hamminga ze słowami kodowymi długości 7 (zdefiniowanego za pomocą macierzy o 3 wierszach i 7 kolumnach).

Zadanie 3. Mówimy, że kod K jednocześnie koryguje s i wykrywa t błędów, jeżeli nie istnieją dwa różne słowa $x, y \in K$ takie, że $S_s(x) \cap S_t(y) \neq \emptyset$. Zauważmy, że jeżeli kod K jednocześnie koryguje s i wykrywa t błędów, to także kod K jednocześnie koryguje t i wykrywa s błędów. Wobec tego dalej będziemy zakładać, że liczba błędów wykrywanych przez takie kody przekracza liczbę błędów korygowanych.

Zadanie 4. Pokaż, że jeżeli $s \leqslant t$ i kod K jednocześnie koryguje s i wykrywa t błędów, to kod K koryguje s błędów i wykrywa $s + t$ błędów.

Zadanie 5. Udowodnij, że kod K jednocześnie koryguje s i wykrywa t błędów wtedy i tylko wtedy, gdy minimalna odległość różnych słów kodowych jest większa od $s + t$.

Zadanie 6. Zauważ, że kod Hamminga koryguje 1 błąd i wykrywa 2 błędy, ale nie jest prawdą, że jednocześnie koryguje 1 błąd i wykrywa 2 błędy. Rozszerzony kod Hamminga składa się ze słów kodu Hamminga uzupełnionych o bit kontroli parzystości. Udowodnij, że rozszerzony kod Hamminga jednocześnie koryguje 1 błąd i wykrywa 2 błędy.

Zadanie 7. Uogólnij lemat charakteryzujący postać macierzy układu równań definiującego kod korygujący 1 błąd na przypadek dowolnego skończonego ciała F: kod $K = \{\vec{x} \in F^n : H\vec{x}^T = \vec{0}^T\}$ koryguje 1 błąd wtedy i tylko wtedy, gdy żadna kolumna macierzy H nie jest iloczynem pewnego elementu ciała F i innej kolumny tej macierzy.

Zadanie 8. Kodem Hamminga nad ciałem F nazywamy zbiór $K = \{\vec{x} \in F^n : H\vec{x}^T = \vec{0}^T\}$ zdefiniowany za pomocą maksymalnej macierzy H spełniającej warunek z poprzedniego zadania. Opisz algorytm korygujący błąd dla takiego kodu Hamminga. Czy takie kody są doskonałe? Znajdź kody Hamminga definiowane nad ciałem Z_3 za pomocą macierzy o 2 i o 3 wierszach.

Antoni Kościelski, 17 października 2000 roku