Kodowanie

Lista nr 2.

Zadanie 1. Rozważamy zbiór nieskończonych ciągów zero-jedynkowych z dodawaniem i mnożeniem przez element z ciała Z_2 zdefiniowanymi tak, jak zwykle są definiowane działania w zbiorze ciągów. Pokaż, że ten zbiór z tymi działaniami jest przestrzenią liniową, która nie jest generowana przez żaden skończony zbiór ciągów.

Zadanie 2. Pokaż, że Z_4 nie jest ciałem. Zastąp w tej strukturze mnożenie modulo 4 innym działanie tak, aby otrzymać ciało.

Zadanie 3. Ustalmy liczbę n i rozważmy zbiór K palindromów długości n nad dwuliterowym alfabetem. Zbadaj własności kodu K. Czy jest to kod liniowy? Jeżeli tak, to opisz kod K podając zbiór generatorów i układ równań definiujący K, a także znajdź dopełnienie K.

Zadanie 4. Rozważamy binarne słowa długości 12. Każde takie słowo wyznacza macierz o 3 wierszach i 4 kolumnach. W tej macierzy, w kolejmych kolumnach pierwszego, drugiego i trzeciego wiersza są wpisane kolejne cyfry pierwszej, drugiej i trzeciej czteroliterowej części rozważanego słowa. Niech $K \subseteq \{0,1\}^{12}$ będzie zbiorem tych słów, które wyznaczają macierze, w których suma modulo 2 liczb znajdujących sie w poszczególnych wierszach i kolumnach jest równa 0. Zbadaj tak zdefiniowany kod K w sposób podany w zadaniu 1. Opracuj algorytmy wykrywający i korygujący maksymalną możliwą do wykrycia lub skorygowania liczbę błędów. (Algorytm wykrywający będy powinien zwracać jedną z trzech informacji: poprawne dane, dane z dopuszczalną liczbą błędów, pozostałe dane).

Zadanie 5. Udowodnij, że każdy liniowy kod długości $2^m - 1$ korygujący jeden błąd ma przynajmniej m symboli kontrolnych.

Zadanie 6. Udowodnij, że w przypadku kodu Hamminga każdy algorytm dekodujący po uruchomieniu z danymi, w których są dwa błędy, zwraca niepoprawną odpowiedź.

Zadanie 7. Rozważmy kod $K \subseteq \{0,1\}^8$ zdefiniowany równaniami

$$\begin{aligned} x_5 &= x_2 + x_3 + x_4 \\ x_6 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ x_7 &= x_1 + x_2 + x_4 \\ x_8 &= x_1 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Zbadaj kod K.

Zadanie 8. Niech $K \subseteq \{0,1\}^n$ będzie k wymiarową podprzestrzenią. Udowodnij, że K jest kodem doskonałym korygującym $\leqslant t$ błędów wtedy i tylko wtedy, gdy

$$2^{n-k} = \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}.$$

Antoni Kościelski, 10 października 2000 roku