Krótko o dowodzeniu

Antoni Kościelski

6 listopada 2003 roku

1. Założenia i teza

Wiele zadań, których rozwiązanie wymaga podania dowodu, jest tak sformułowane:

> *Udowodnij (pokaż, uzasadnij), że jeżeli coś zachodzi, to także zachodzi coś innego.*

Zdanie postaci *jeżeli* α*, to* β nazywamy implikacją. Implikacja w języku sformalizowanym ma postać $\alpha \Rightarrow \beta$. Fragment tego zdania oznaczony literą α nazywamy poprzednikiem implikacji, a oznaczony literą β – następnikiem.

Przypuśćmy, że mamy pokazać implikację *jeżeli* α*, to* β. W tym kontekscie zdanie opisujące sytuację, o której mamy coś pokazać, a więc poprzednik α, nazywamy założeniem. Natomiast zdanie wyrażające to, co należy pokazać, czyli następnik β, nazywamy tezą.

Pojęcia poprzednika i następnika są bardzo jasne. Tego samego nie można powiedzieć o założeniu i tezie. Problem polega na tym, że pojęcia te zależą od planu rozwiązania zadania. Możemy zdefiniować je tak, jak to zostało zrobione. Możemy też przyjąć, że implikację będziemy dowodzić nie korzystając z żadnych założeń. Wtedy za tezę musimy jednak uznać całą implikację.

W bardziej skomplikowanych przypadkach mamy jeszcze więcej możliwości. Przyjmijmy, że zadanie zostało sformułowane tak:

> *Załóżmy że rozważamy jakąś sytuację. Pokaż, że jeżeli (w tej sytuacji) coś zachodzi, to także zachodzi coś innego.*

Z punktu widzenia logiki sformułowanie to można rozumieć jako polecenie wykazania implikacji

$$\textit{jeżeli } \alpha, \textit{ to jeżeli } \beta, \textit{ to } \gamma. \tag{1}$$

Autor zadania zawarł już w jego treści sugestię, że α jest założeniem i mamy dowieść implikację *jeżeli* β*, to* γ. Rzeczywiście, możemy przyjąć, że α jest założeniem, a implikacja *jeżeli* β*, to* γ jest tezą. Możemy za założenia uznać zdania α i β. Wtedy tezą jest γ. Oczywiście, możemy też nie przyjmować żadnych założeń i cała implikację (1) uważać za tezę.

Jeżeli zadanie nie jest implikacją, to nie możemy jakichkolwiek zdań uznać za założenia, a tezą jest całe sformułowanie zadania.

Tym łatwiej coś wywnioskować, im więcej mamy informacji. Stąd wynika zasada praktyczna, że jeżeli coś można uznać za założenie, to dobrze jest to uczynić.

2. Rodzaje zdań w dowodach

Różne stwierdzenia i fakty dowodzimy po to, aby przekonać siebie i inne osoby o ich prawdziwości. Zwykle dowodzi się twierdzenia matematyczne, ale z dowodami można się spotkać studiując fizykę. Informatycy dowodzą np. poprawność zastosowanych algorytmów.

Można przekonać się przeglądając podręczniki z zamieszczonymi dowodami, że są to teksty złożone ze zwykłych zdań zapisanych w języku naturalnym, zawierające często także różne wzory. Dowód różni się od zwykłego tekstu tym, że zdania w nim umieszczone muszą być ze sobą powiązane pod względem logicznym.

W formalnych systemach logicznych zdania zamieszczane w dowodzie mogą być założeniami, aksjomatami, wcześniej dowiedzionymi twierdzeniami, definicjami lub wnioskami ze zdań poprzedzających.

W języku naturalnym jest podobnie, choć trudno jest zakwalifikować poszczególne zdania naturalnego dowodu do jednej z wymienionych kategorii. Zwykle założenie, czy wcześniej udowodnione twierdzenie nie bedzie jednym ze zdań dowodu. Raczej będziemy się na nie powoływać w bardziej skomplikowanym, ale lepiej brzmiącym zdaniu. Jeżeli będziemy chcieli skorzystać z twierdzenia mówiącego, że *2+2=4*, to nie napiszemy tego zdania, ale napiszemy *teraz skorzystamy ze znanego wzoru 2+2=4* lub coś podobnego, dodając mnóstwo informacji niepotrzebnych z punktu widzenia logiki (np. że właśnie teraz skorzystamy). Dopiero po usunięciu tych zbędnych informacji powinniśmy otrzymać dowód przypominający dowód sformalizowany.

3. Korzystanie z aksjomatów i dowiedzionych twierdzeń

Aksjomatami nazywamy zdania, które są bez dowodu uznawane za prawdziwe. Jednym z bardziej znanych jest aksjomat (zasada) ekstensjonalności. Zgodnie z tym aksjomatem, jeżeli dwa zbiory mają te same elementy, to są identyczne. Aksjomaty teorii mnogości, w tym także podany aksjomat, wyjaśniają, w jaki spoób rozumiemy pojęcie zbioru. Każda teoria matematyczna jest oparta na pewnej liście aksjomatów. W dowodach mamy prawo umieszczać aksjomaty i powoływać się na nie.

W dowodach możemy też wykorzystywać wcześniej udowodnione twierdzenia. Zwykle nie budzi to zastrzeżeń. Niewątpliwie, dowodząc twierdzenie po raz pierwszy w historii możemy skorzystać z całej zgromadzonej wiedzy. Podobnie student, który weryfikuje po kolei wszystkie twierdzenia, weryfikując kolejne może skorzystać z wszystkich, które dotychczas zweryfikował.

Powoływanie się na znane twierdzenia powoduje trochę nieporozumień na egzaminach. Zadanie egzaminacyjne może być identyczne z twierdzeniem udowodnionym na wykładzie lub zamieszczonym w podręczniku. W takiej sytuacji stwierdzenie, że jest to już dowiedziony fakt, nie zostanie uznane za poprawne rozwiązanie zadania. Możliwe są też mniej oczywiste sytuacje. Jeżeli jakieś pojęcie zostało na wykładzie inaczej zdefiniowane niż w podręczniku (który nie był polecany), a podana w zadaniu własność wynika łatwo z definicji podręcznikowej w przeciwieństwie do definicji z wykładu, to powołanie się na równoważność tych definicji może zostać odebrane jako próba ominięcia istotnych trudności i ocenione niżej. W tej sytuacji lepiej pokazać równoważność definicji, niż się na nią powoływać.

4. Wnioski

Aby wyjaśnić, jakie zdania są wnioskami z innych zdań, trzeba najpierw wyjaśnić, co to są reguły wnioskowania. Każdy wniosek zostaje bowiem uzyskany za pomocą pewnej reguły wnioskowania.

Przykładem reguły wnioskowania jest reguła odrywania. Zgodnie z tą reguła z implikacji *jeżeli* α*, to* β i z jej poprzednika α możemy wywnioskować następnik implikacji, czyli β. Jeżeli przyjmiemy tę regułę i jeżeli w pewnym dowodzie wystąpiła implikacja *jeżeli* α*, to* β oraz jej poprzednik α, to w tym dowodzie możemy umieścić także zdanie β jako wniosek z podanych zdań uzyskany za pomocą reguły odrywania.

W formalnych systemach logicznych wymienia się zwykle kilka lub kilkanaście reguł wnioskowania. Wtedy przez wniosek z pewnych zdań rozumie się wniosek otrzymamy za pomocą jednej z wymienionych reguł zastosowanej do tych zdań. Reguły te w większości są równie oczywiste jak reguła odrywania i wiele osób, także nie znających logiki, posługuje się nimi bezwiednie. Kilka reguł wnioskowania zostanie omówione w dalszych rozdziałach.

Reguły wnioskowania formułowane przez logików w zupełności wystarczają do konstruowania dowodów. Gdyby wymagać jednak korzystania wyłącznie z tych reguł, to dowody byłyby bardzo długie. Często korzystamy z wielu innych sposobów wnioskowania uzasadnionych zdobytą wcześniej wiedzą. Oparte na tych sposobach reguły wnioskowania logicy nazywają wtórnymi. Jeżeli ktoś napisze *wiemy, że liczba naturalna* x *jest większa od* 3,3*; stąd wynika, że* $x \geq 4$, to nikt nie będzie twierdził, że w tym fragmencie dowodu jest luka, chyba że intencją zadania było zweryfikowanie takich elementarnych własności porządku w zbiorze liczb rzeczywistych. Możemy przyjąć, że $x \geq 4$ jest wnioskiem otrzymanym w oparciu o odpowiednią wtórną regułę ze zdań x *jest liczbą naturalną* i $x \geq 3{,}3$. Można ten fragment dowodu też uzasadnić powołaniem się na regułę odrywania i fakt (powinien być wcześniej dowiedziony), że jeżeli liczba naturalna x jest większa od 3,3, to jest przynajmniej równa 4.

5. Dowody wprost i nie wprost

Rozróżniamy dwa rodzaje dowodów: dowody są wprost lub nie wprost.

Dowód wprost polega na wyprowadzaniu z założeń, aksjomatów, wcześniej dowiedzionych twierdzeń i definicji coraz to nowych wniosków (także wniosków z wniosków). Dowód wprost zostaje zakończony, jeżeli jednym ze zdań w tym dowodzie jest teza.

Dowód nie wprost tworzymy bardzo podobnie: wyprowadzamy wnioski z założeń, aksjomatów, wcześniej dowiedzionych twierdzeń i definicji. W przeciwieństwie do dowodu wprost mamy prawo korzystać jeszcze z dodatkowego założenia nazywanego założeniem dowodu nie wprost. Tym dodatkowym założeniem jest negacja (zaprzeczenie) tezy. Dowodząc nie wprost na ogół nie dążymy do wywnioskowania tezy (choć możemy). Dowód nie wprost zostaje zakończony, jeżeli pojawią się w nim zdania sprzeczne. Sprzecznymi są dwa zdania, z których jedno jest negacją drugiego.

W praktyce dowód nie wprost kończymy wtedy, gdy pojawi się w nim zdanie, o którym wiemy, że jest fałszywe (powinniśmy więc umieć udowodnić jego negację), albo dwa zdanie, które jednocześnie nie mogą być prawdziwe. Na przykład, zakończymy dowód nie wprost, jeżeli o pewnej liczbie rzeczywistej x wywnioskujemy, że $x < 0$, jak również $x > 0$. Żadne z tych zdań nie jest negacją drugiego, ale wiemy, że nierówności $x < 0$ wynika, że $\neg(x > 0)$ i obie nierówności nie mogą jednocześnie zachodzić.

6. Kilka prostych dowodów

Dla przykładu podamy teraz dowody kilku podstawowych twierdzeń z logiki.

Twierdzenie 6.1. *Jeżeli $\neg\neg\alpha$, to α.*

Dowód. Przyjmujemy, że $\neg\neg\alpha$ jest założeniem. Wtedy tezą jest formuła α. Podane twierdzenie udowodnimy metodą nie wprost. Jako założenie dowodu nie wprost przyjmujemy więc $\neg\alpha$. W tym momencie dowód już został zakończony i nie musimy wyprowadzać jakichkolwiek wniosków. Występuje w nim zdanie $\neg\alpha$ i jego negacja $\neg\neg\alpha$. Uzyskaliśmy więc sprzeczność świadczącą o prawdziwości dowodzonego twierdzenia. □

Zauważmy, że właściwie udowodniliśmy coś więcej. Pokazaliśmy, że można dowieść każdą implikację postaci *jeżeli $\neg\neg\alpha$, to α*, i to nie korzystając z żadnych aksjomatów, ani nie posługując się kwantyfikatorami. Takie twierdzenia nazywamy prawami rachunku zdań.

Wniosek 6.2. *Jeżeli $\neg\neg\neg\alpha$, to $\neg\alpha$.* □

Twierdzenie 6.3. *Jeżeli α, to $\neg\neg\alpha$.*

Dowód. Załóżmy, że zachodzi α, i dodatkowo – dla dowodu nie wprost – $\neg\neg\neg\alpha$. Z założenia dowodu nie wprost i wyżej sformułowanego wniosku wynika, że $\neg\alpha$ (na podstawie reguły odrywania). To kończy dowód, ponieważ wywnioskowaliśmy zdanie sprzeczne z założeniem. □

Twierdzenia 6.1 i 6.3 łącznie nazywamy prawem podwójnej negacji.

Twierdzenie 6.4. *Jeżeli α implikuje β, to także $\neg\beta$ implikuje $\neg\alpha$.*

Dowód. Twierdzenie to ma postać $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$. Dla dowodu nie wprost możemy przyjąć, że założeniami są implikacja *jeżeli α, to β* oraz negacje $\neg\beta$ i $\neg\neg\alpha$. Z prawa podwójnej negacji (twierdzenie 6.1) możemy wywnioskować, że zachodzi α. Stąd i z założonej implikacji, korzystając ponownie z reguły odrywania otrzymujemy, że β. W ten sposób wywnioskowaliśmy zdanie, które jest sprzeczne z jednym z założeń, i to kończy dowód. □

Udowodnione prawo nazywamy prawem kontrapozycji. Z prawa kontrapozycji wywnioskujemy teraz prawo wyłączonego środka.

Twierdzenie 6.5. *Zachodzi α lub $\neg\alpha$.*

Dowód. Twierdzenie 6.5 będziemy dowodzić metodą nie wprost. Przyjmijmy więc jako założenie dowodu nie wprost, że nie zachodzi α lub $\neg\alpha$, czyli $\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$.

Najpierw zauważmy, że można dowieść implikacje *jeżeli α, to α lub $\neg\alpha$*. Wymaga to skorzystania z oczywistej, ale nie sformułowanej dotąd reguły wnioskowania dotyczącej alternatywy.

Dalej, jedno z podstawień prawa kontrapozycji stwierdza, że jeżeli α implikuje alternatywę α lub $\neg\alpha$, to także negacja alternatywy α lub $\neg\alpha$ implikuje $\neg\alpha$, czyli

$$(\alpha \Rightarrow (\alpha \vee \neg\alpha)) \Rightarrow (\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \Rightarrow \neg\alpha). \tag{2}$$

Z podstawienia (2) i przytoczonej implikacji otrzymujemy, że negacja alternatywy α lub $\neg\alpha$ implikuje $\neg\alpha$ (a więc $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \Rightarrow \neg\alpha$). Stąd i założenia dowodu nie wprost wynika, że $\neg\alpha$.

Przedstawiony dowód polegał na wywnioskowaniu (w szczególnej sytuacji) z negacji alternatywy negacji jej pierwszego członu. W ten sam sposób można dowieść, że z negacji alternatywy wynika negacja jej drugiego członu. W rozważanej sytuacji w ten sposób dowiedziemy, że $\neg\neg\alpha$. To zakończy dowód, ponieważ dołączymy do niego sprzeczne zdania $\neg\alpha$ i $\neg\neg\alpha$. □

Twierdzenie 6.6. *Załóżmy, że α implikuje γ oraz β implikuje γ. Wtedy także alternatywa α lub β implikuje γ.*

Dowód. Dowód tego prawa pozostawiamy jako ćwiczenie. Łatwo to można dowieść korzystając z reguły, która pozwala z alternatywy i negacji jednego z jej członów wywnioskować drugi człon. □

7. Wnioskowanie z alternatyw

Przypuśćmy, że mamy dowieść twierdzenie, w którym jednym z założeń jest alternatywa. Takie twierdzenia bywają trudne do udowodnienia.

Jedna z metod pozwalająca radzić sobie w takiej sytuacji wynika z twierdzenia 6.6. Jeżeli np. dowodzimy twierdzenie postaci $(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma$, to polega ona na dowiedzeniu dwóch twierdzeń $\alpha \Rightarrow \gamma$ oraz $\beta \Rightarrow \gamma$. Jeżeli udowodnimy te twierdzenia, to na podstawie prawa 6.6 możemy również dowieść, że $(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma$.

8. Dowodzenie przez rozpatrywanie przypadków

Szczególnym przypadkiem metody z rozdziału 7 jest dowód polegający na rozpatrzeniu kilku (w najprostszej wersji: dwóch) przypadków. Przypuśćmy, że chcemy dowieść zdanie γ. Zdarza się, że łatwo wyprowadzić γ korzystając z dodatkowego założenia α, a więc łatwo dowodzi się implikację $\alpha \Rightarrow \gamma$. Jeżeli uda się nam także dowieść zdanie $\neg\alpha \Rightarrow \gamma$, to zgodnie z metodą z rozdziału 7 uzasadniliśmy implikację $(\alpha \vee \neg\alpha) \Rightarrow \gamma$. Teraz, posługując się prawem 6.5 wyłączonego środka i regułą odrywania, możemy dowieść także γ.

Ten sposób uzasadniania nazywamy dowodzeniem przez rozpatrywanie przypadków.

9. Zmienne wolne i związane

Pojęcie formuły jest uogólnieniem pojęcia zdania i pełni podobną rolę. O formułach mówimy zwłaszcza wtedy, gdy dopuszczamy użycie w zdaniach symboli oznaczających nieokreślone elementy. Takie symbole nazywamy zmiennymi. Zmiennymi są symbole x w formułach $x \geq 0$ oraz

$$\text{\textit{każde } } x \text{\textit{ spełnia nierówność} } x \geq 0. \tag{3}$$

Zauważmy, że zmienne w podanych formułach odgrywają różną rolę. Badając, czy $x \geq 0$, najpierw musimy ustalić, co oznacza symbol x. Jeżeli $x = 1$, to własność ta zachodzi, a nie zachodzi np. dla $x = -1$. Inaczej jest w przypadku formuły (3). To, czy jest ona prawdziwa, nie zależy od tego, co x oznacza. Badając prawdziwość formuły (3) w formule $x \geq 0$ podstawiamy za x kolejno wszystkie możliwe wartości i sprawdzamy, czy zachodzi $x \geq 0$. Jeżeli zachodzi dla wszystkich możliwych wartości x, to formuła (3) jest prawdziwa. W przeciwnym razie jest fałszywa. Pierwsza z tych możliwości ma miejsce, jeżeli zdanie (3) wyraża własność liczb naturalnych, druga – jeżeli jest to własność liczb rzeczywistych. Zawsze jednak prawdziwość tej formuły nie zależy od wartości zmiennej x, a zależy od wszystkich dopuszczalnych wartości tej zmiennej.

Oba wystąpienie symbolu x w formule (3) nazywamy związanymi (kwantyfikatorem *dla każdego*), a samą zmienną x nazywamy związaną. Wystąpienie x w formule $x \geq 0$ nazywamy wolnym, a zmienną x – wolną. Możemy też napisać formułę

$$x \geq 0 \textit{ oraz każde } x \textit{ spełnia nierówność } x \geq 0. \tag{4}$$

W tej formule x jest zarówno zmienną wolną, jak i związaną. Pierwsze wystąpienie x jest wolne, pozostałe są związane. Związane z tymi pojęciami intuicje są następujące. Zmienne wolne coś oznaczaczają, choć nie zawsze wiemy co. Zmienne związane umożliwiają wyrażenie pewnych szczegółów niezbędnych wtedy, gdy posługujemy się kwantyfikatorami.

W niektórych systemach logicznych wymaga się, aby zmienne odgrywające rolę zmiennych wolnych były oznaczane innymi symbolami niż zmienne związane kwantyfikatorami. W takich systemach trudniej popełnić błąd logiczny, za to często pojawiają się niepoprawne formuły. Zwykle nie wprowadza się ograniczeń tego typu i pozwala się pisać formuły takie, jak (4). Wtedy trzeba pamiętać, że ten sam symbol zależnie od kontekstu może mieć różne znaczenia i nie można dopuścić do ich pomylenia. Przykład związanych z tym kłopotów można znaleźć w rozdziale 12.

10. Zwrot „t ma własność $\alpha(x)$”

Na formułę $y < x$ można patrzeć na kilka sposobów. W szczególności możemy wyobrażać sobie, że y oznacza ustaloną (choć nieznaną) liczbę i porównujemy inne liczby z y, a więc interesuje nas, dla jakich x zachodzi własność $y < x$. W tej sytuacji na $y < x$ patrzymy jak na formułę wyrażającą własność x. Jeżeli mamy formułę α i uważamy ją za formułę wyrażającą własność x, to zamiast α napiszemy $\alpha(x)$. W ten sposób podkreślamy tylko, że x pełni w formule α specjalną rolę.

Termem nazywamy dowolny fragment formuły oznaczający pewną rzecz. Na przykład, termami są napisy 1 oraz $z+1$. Pierwszy z tych napisów zwykle oznacza liczbę jeden, drugi – liczbę o jeden większą od oznaczanej symbolem z.

Przypuśćmy, że mamy formułę $\alpha(x)$ i term t. Spróbujemy utworzyć formułę stwierdzającą, że t ma własność $\alpha(x)$. Formułę tę będziemy oznaczać symbolem $\alpha(x/t)$.

Wydaje się, że formułę $\alpha(x/t)$ otrzymamy zastępując x w napisie $\alpha(x)$ (wszędzie tam, gdzie występuje) napisem t. Tak postąpimy, jeżeli będzie chcieli napisać, że $z+1$ jest jedną z liczb x, które mają własność $y < x$. W tym przypadku wystarczy, że x w formule $y < x$ zastąpimy przez $z+1$. Otrzymujemy w ten sposób $y < z+1$.

Zmienne pełnią jednak różne funkcje zależnie od kontekstu. Podczas podstawiania za x nie powinny ulec zmianie te wystąpienia, w których symbol x pełni funkcję pomocniczą w zapisie formuł z kwantyfikatorami i nic nie oznacza. Nie zastępujemy symbolu x tam, gdzie jest zmienną związaną. Formułę $\alpha(x/t)$ tworzymy zastępując napisem t tylko wolne wystąpienia x w formule $\alpha(x)$. Fakt, że liczba $z+1$ jest liczbą x mającą własność $y \geq x \ \wedge \ \forall x\ (x \geq 0)$ wyrażamy pisząc $y \geq z+1 \ \wedge \ \forall x\ (x \geq 0)$.

11. Wnioskowanie ze zdań uniwersalnych

Zdania uniwersalne zaczynają się zwrotem *dla każdego*. W języku sformalizowanym mają postać $\forall x\ \alpha(x)$.

Wyprowadzając wnioski ze zdania uniwersalnego najczęściej korzystamy z tzw. reguły opuszczania kwantyfikatora uniwersalnego. Reguła ta pozwala ze zdania $\forall x\ \alpha(x)$ wyprowadzić wniosek, że t ma własność $\alpha(x)$, czyli formułę $\alpha(x/t)$. Trzeba jednak pamiętać, że czasem stosowanie tej reguły prowadzi do błędu.

Przypuśćmy, że korzystając z pewnych założeń dowodzimy własność liczby naturalnej oznaczanej symbolem x. W dowodzie tej własności chcemy skorzystać z faktu, że dla każdej liczby naturalnej y istnieje taka liczba x, że $y < x$. Jeżeli tak jest dla każdej liczby naturalnej, to jest tak również dla liczby oznaczanej literą x. Zgodnie z reguła opuszczania kwantyfikatora uniwersalnego stąd wynika, że istnieje taka liczba x, dla której $x < x$. Takie zdania nie powinno się dać wywnioskować.

W tym rozumowaniu zmienna wolna x, oznaczająca pewną liczbę naturalną, po skorzystaniu z reguły opuszczania kwantyfikatora uniwersalnego znalazła się w zasięgu kwantyfikatora wiążącego zmienną x i stała się związaną. Doszło do pomylenia dwóch funkcji zmiennej x i to doprowadziło do błędnego wniosku.

Reguły opuszczania kwantyfikatora uniwersalnego nie wolno stosować w takich sytuacjach. Aby ich uniknąć, wystarczy tak dobierać oznaczenia, by w całym dowodzie zmienne pełniące różne funkcje były oznaczane różnymi symbolami.

12. Dowodzenie zdań uniwersalnych

Zdania uniweralne najczęściej dowodzimy korzystając z reguły generalizacji, nazywanej też regułą dołączania kwantyfikatora uniwersalnego. Reguła ta stwierdza, że ze zdania mówiącego, że x ma własność $\alpha(x)$ możemy wywnioskować zdanie stwierdzające, że każde x ma własność $\alpha(x)$.

Dowody zdań postaci $\forall x\ \alpha(x)$ zaczynają się zwykle zwrotem *weźmy dowolne* x. Po tym zwrocie następuje dowód własności $\alpha(x)$. Następnie, korzystając z reguły generalizacji, jest wyprowadzane dowodzone zdanie uniwersalne. Zauważmy, że jeżeli w dowodzie $\alpha(x)$ symbol x zastąpimy np. przez 1, to powinniśmy otrzymać dowód faktu stwierdzającego, że 1 ma własność α. Podobnie będzie, jeżeli x zastąpimy symbolem oznaczającym jakikolwiek inny element. Dowód formuły $\alpha(x)$ jest schematem pozwalającym na udowodnienie własności α bez względu na znaczenie symbolu x. Świadczy więc o tym, że każde x ma własność $\alpha(x)$.

Z reguły generalizacji też nie zawsze możemy skorzystać. Przypuśćmy, że dowodzimy pewną własność liczb rzeczywistych przy założeniu, że $x < 0$. W dowodzie tej własności jest więc zdanie stwierdzające, że $x < 0$. Reguła generalizacji pozwala wywnioskować z tego zdania, że każde x (będące liczbą rzeczywistą) jest mniejsze od zera. Przedstawione rozumowanie prowadzi więc do fałszywego wniosku.

Podany przykład wskazuje na ograniczenia stosowania reguły generalizacji. Reguły tej nie stosuje się do formuł wyrażających własności tych przedmiotów, o których jest mowa w założeniach dowodu. Dokładniej, reguły generalizacji ze zmienną x nie wolno stosować, jeżeli x jest zmienną wolną w założeniach dowodu. Jeżeli z jakiegoś powodu postanowiliśmy ograniczyć się do rozważania takiej sytuacji, w której symbol x ma specyficzną własność, to nie możemy wysnuć wniosku, że wszystkie elementy mają tę własność.

13. Wnioskowanie ze zdań egzystencjalnych

Zdanie egzystencjalne zaczyna się najczęściej słowem *istnieje*, a w języku sformalizowanym ma postać $\exists x\ \alpha(x)$.

Podstawowy sposób wyprowadzania wniosków ze zdań egzystencjalnych wyraża reguła opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego. Jeżeli w dowodzie znalazło się zdanie stwierdzające, że istnieje element x mający własność $\alpha(x)$, to – zgodnie z tą reguła – możemy wprowadzić symbol oznaczający ten element (teraz jest to symbol c) i możemy do dowodu dołączyć jako wniosek zdanie $\alpha(x/c)$.

Stosowanie reguły opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego podlega pewnym rygorom. Jeżeli reguła ta jest w dowodzie stosowana kilkakrotnie, to za każdym razem musimy wprowadzić nowy symbol, różny od wszystkich innych symboli występujących w dowodzie i wykorzystywanych do oznaczania potrzebnych elementów. Na przykład, jeżeli ze zdania *istnieje liczba dodatnia* wywnioskowaliśmy, że $c > 0$, to ze zdania *istnieje liczba ujemna* nie możemy wywnioskować ani zdania $1 < 0$, ani zdania $c < 0$. Oba te wnioski bez powodu prowadziłyby do sprzeczności. Zgodnie z omawianą regułą, jeżeli stosujemy ją w dowodzie po raz drugi, po wprowadzeniu symbolu c, to możemy w dowodzie zamieścić na przykład stwierdzenie $d < 0$.

Przyjrzyjmy się jeszcze takiemu rozumowaniu. Najpierw powołujemy się na fakt, że dla dowolnego x istnieje y takie, że $x = y$ (a więc $\forall x \exists y\ x = y$). Weźmy teraz dowolne x (gdyż planujemy skorzystać z reguły generalizacji). Dla tego x też istnieje y takie, że $x = y$ (czyli $\exists y\ x = y$). Korzystając z reguły opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego to istniejące y oznaczamy symbolem c i stwierdzamy, że $x = c$. Mamy prawo dołączyć kwantyfikator uniwersalny *dla każdego x*, gdyż nie mamy założeń i z tego powodu zmienna x nie jest wolna w założeniach. W ten sposób otrzymujemy, że *każde x jest równe c*. Już widać, że popełniliśmy błąd. Jednak weźmy jeszcze dowolne x i y. Ze zdania *każde x jest równe c* możemy wywnioskować zarówno $x = c$ jak i $y = c$. Stąd i z przechodniości identyczności otrzymujemy, że $x = y$. Po dwukrotnym dołączeniu kwantyfikatora uniwersalnego dostajemy, że każde dwa elementy są równe ($\forall x\ \forall y\ x = y$).

W podanym rozumowaniu regułę opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego stosujemy do formuły, w której po zwrocie *istnieje y* znajduje się formuła $x = y$ ze zmienną wolną x. W tej sytuacji zamiast c lepiej wprowadzić oznaczenie $c(x)$. Zwykle się tego nie robi, ale wtedy trzeba pamiętać, że „c zależy od x". Zauważmy, że jeżeli zamiast c w podanym dowodzie napiszemy $c(x)$, to już nic złego nie udowodnimy. Nie ma powodu, aby wniosek *każde x jest* *równe* $c(x)$ był niepoprawny. Można z niego dalej wyprowadzić równości $x = c(x)$ i $y = c(y)$. Nie ma jednak podstaw, aby z tych równości wywnioskować, że $x = y$.

14. Definicje

Definiujemy albo własności przysługujące pewnym obiektom (także relacje lub związki między obiektami), albo szczególne obiekty. Definicje pojęcia podzielności liczby przez inną i równoległości prostych są przykładami definicji pierwszego rodzaju. Taką jest też definicja liczb pierwszych:

> *liczba p jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy jest liczbą naturalną i nie dzieli się przez żadną liczbę naturalną, która jest jednocześnie większa od 1 i mniejsza od p.*

Drugi rodzaj to na przykład definicje sumy mnogościowej zbiorów lub liczby π. Liczbę π można zdefiniować w taki oto sposób:

> *liczba* π *jest równe obwodowi okręgu o średnicy 1.*

Definicje pierwszego rodzaju mają postać równoważności

> *elementy* $x_1, \dots, x_n$ *mają własność (są w relacji) P wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (formuła)* φ.

Definicja własności P w języku sformalizowanym przyjmuje postać

$$P(x_1, \dots, x_n) \iff \varphi.$$

Składa się ona z części definiowanej (lewa strona równoważności) i definiującej (formuła φ). Jest poprawna, jeżeli

1) każda ze zmiennych $x_1, \dots, x_n$ występuje w części definiowanej tylko jeden raz,
2) żadne inne zmienne poza $x_1, \dots, x_n$ nie są zmiennymi wolnymi w części definiującej (złamanie tej zasady pozwala na konstruowanie błędnych dowodów podobnych do opisanych w rozdziale 13),
3) wszystkie pojęcia i symbole występujące w części definiującej są zdefiniowane, a w szczególności, w φ nie występuje definiowana własność P.

Przejdźmy teraz do definicji drugiego rodzaju. Tylko niektóre definicje obiektów mają postać taką, jak definicja π, czyli $\pi = \dots$ Ogólniejsza definicja tego typu stwierdza, że

> $p(x_1, \dots, x_n)$ *jest tym elementem* y*, który ma własność* $\varphi(y)$.

Bardziej formalnie taką definicję zapisuje się jako

$$p(x_1, \dots, x_n) = y \iff \varphi(y), \tag{5}$$

albo jeszcze krócej jako

$$\varphi(p(x_1, \dots, x_n)). \tag{6}$$

Aby definicje (5) i (6) były poprawne, powinny być spełnione podane już warunki poprawności definicji (warunki 1) i 2) dotyczą teraz także zmiennej y). Ponadto wymaga się, aby istniał y mający własność $\varphi(y)$, i aby taki y był tylko jeden. Nietrudno zauważyć, że jeżeli definicje (5) i (6) są poprawne, to są równoważne. Definicja (5) też składa się z części definiowanej i definiującej.

Dla przykładu przyjrzyjmy się definicji sumy mnogościowej $A \cup B$ zbiorów A i B. Zbiór ten możemy zdefiniować na dwa sposoby:

$$A \cup B = Y \iff \forall x\ (x \in Y \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B))$$

lub też

$$\forall x (x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)).$$

W każdym dowodzie mamy prawo powołać się na dowolną definicję. Możemy ją po prostu zamieścić w dowodzie po zastąpieniu zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ i ewentualnie y dowolnymi termami lub po związaniu wszystkich zmiennych wolnych kwantyfikatorami uniwersalnymi. Możemy też korzystać z wtórnych reguł wnioskowania pozwalających po podstawieniu w definicji dowolnych termów na zastąpienie części definiowanej definiującą i odwrotnie.

15. „Oczywiste" fragmenty dowodów

We wszelkich dowodach, zarówno podręcznikowych, przedstawianych na wykładach, jak i podawanych przez studentów pojawia się zwrot *jest oczywiste, że* ... Prawie zawsze zwrot ten wskazuje na fragment dowodu, który został pominięty. Może też oznaczać powołanie się na znany, ale niekoniecznie jasno wskazany fakt.

Zwrot ten inaczej należy rozumieć, jeżeli został użyty przez wykładowcę, a inaczej, jeżeli pojawił się w pracy egzaminacyjnej studenta. Wykładowca z różnych powodów ma prawo przedstawić pobieżnie część rozumowania. W jego ustach stwierdzenie, że coś jest oczywiste, może być rozumiane jako zachęta do samodzielnego sprawdzenia fragmentu dowodu. W pracy egzaminacyjnej takie stwierdzenie może oznaczać opuszczenie istotnego fragmentu dowodu.

Mimo to zachęcałbym do podejmowania ryzyka i pomijania mało istotnych fragmentów dowodu. Wymaga to pewnego wyczucia, ale dzięki temu dowody ulegają skróceniu i stają się bardziej przejrzyste. Na egzaminie prawie zawsze zabraknie czasu na przedstawienie wszystkich szczegółów. Należy też pamiętać, że jeżeli w dowodzie jest błąd, to z dużym prawdopodobieństwem jest on w tej części, która nie została starannie zweryfikowana.

16. Zasady posługiwania się symbolami

Rozwiązując zadanie mamy prawo posługiwać się wszelkimi symbolami występującymi w sformułowaniu. Należy jednak pamiętać, że zmienna związana w sformułowaniu zadania nie powinna bez istotnego powodu stać się wolna w rozwiązaniu.

Mamy też prawo posługiwać się wszystkimi symbolami zgodnie z przypisanym im znaczeniem, zwłaszcza symbolami używanymi powszechnie (np. symbolem π w zwykłym znaczeniu lub symbolem $\in$ oznaczający relację należenia). Po podaniu poprawnej definicji możemy posługiwać się też innymi symbolami.

Jeżeli dowodzimy zdanie z kwantyfikatorem uniwersalnym wiążącym x korzystając z reguły generalizacji, to w dowodzie tego zdania możemy posłużyć się zmienną x.

Poza zmiennymi związanymi w rozwiązaniu zadania w zasadzie używamy tylko symboli wymienionych w sformułowaniu, symboli zdefiniowanych i zmiennych potrzebnych gdy stosujemy regułę generalizacji. Pewnym wyjątkiem jest jeszcze fragment dowodu, w którym powołujemy się na wcześniej dowiedzione twierdzenie (lub fragment zawierający dowód pomocniczego faktu). Jeżeli powołujemy się na twierdzenie $\alpha(x)$ ze zmienną wolną x, to w dowodzie pojawi się zmienna x tylko dlatego, że została użyta w sformułowaniu tego twierdzenia. Może to doprowadzić do różnych komplikacji. Zauważmy, że jeżeli potrafimy dowieść $\alpha(x)$, to potrafimy także dowieść $\forall x\ \alpha(x)$. Zamiast na $\alpha(x)$ lepiej powoływać się na twierdzenie $\forall x\ \alpha(x)$ lub – od razu – na wynikający z niego wniosek $\alpha(x/t)$, gdzie t jest odpowiednio dobranym termem zawierającym już tylko te symbole, którymi mamy prawo posługiwać się.