2.7. Twierdzenie Cauchy'ego (¹).

TWIERDZENIE. *Na to, żeby ciąg* $\{a_n\}$ *był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istniała taka liczba* r, *że dla* $n > r$ *zachodzi nierówność*

$$|a_n - a_r| < \varepsilon \,. \tag{22}$$

Dowód składa się z dwóch części. W pierwszej części udowodnimy, że jeżeli ciąg jest zbieżny, to warunek sformułowany w twierdzeniu, tzw. *warunek Cauchy'ego*, jest spełniony; czyli że warunek ten jest warunkiem koniecznym zbieżności ciągu. W drugiej części dowodu wykażemy, że jeśli warunek Cauchy'ego jest spełniony, to ciąg jest zbieżny; czyli że warunek ten jest wystarczający dla zbieżności ciągu.

1° Niech więc $\lim a_n = g$. Niech dane będzie $\varepsilon > 0$. Istnieje więc takie r, że dla $n \geqslant r$ zachodzi $|a_n - g| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Nierówność ta zachodzi w szczególności dla $n = r$, tj. $|a_r - g| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dodając te dwie nierówności pod znakiem bezwzględnej wartości, otrzymujemy wzór (22).

2° Załóżmy teraz, że warunek Cauchy'ego jest spełniony. Należy dowieść, że ciąg jest zbieżny. Udowodnimy przede wszystkim, że jest to ciąg ograniczony. Dowód przeprowadzimy analogicznie do dowodu z § 2.3. Podstawmy mianowicie $\varepsilon = 1$. Istnieje więc takie r, że dla $n > r$ mamy $|a_n - a_r| < 1$. Stąd

$$|a_n| - |a_r| \leqslant |a_n - a_r| < 1 \,,$$

a więc $|a_n| < |a_r| + 1$. Oznaczmy przez M liczbę większą od każdej spośród r następujących liczb: $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{r-1}|, |a_r| + 1$. Mamy więc $M > |a_n|$ dla każdego n. Oznacza to, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony.

Wnosimy stąd na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, że ciąg ten zawiera podciąg zbieżny. Niech więc $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n} = g$, przy czym $m_1 < m_2 < \ldots$ Udowodnimy, że $g = \lim\limits_{n=\infty} a_n$.

Niech więc dane będzie $\varepsilon > 0$. Na mocy warunku Cauchy'ego istnieje takie r, że dla $n > r$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - a_r| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \,. \tag{23}$$

Na mocy równości $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n} = g$ istnieje takie k, że dla $n > k$ mamy

$$|a_{m_n} - g| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \,. \tag{24}$$

Rzecz jasna, że można było dobrać k w taki sposób, aby $k > r$. Wówczas dla $n > k$ obie nierówności (23) i (24) są spełnione równocześnie.

(¹) Augustin Cauchy (1789-1857) — jeden z najwybitniejszych matematyków francuskich. Ustalenie podstawowych pojęć i twierdzeń teorii ciągów i szeregów oraz teorii funkcji ciągłych jest w znacznym stopniu jego dziełem.

Zarazem dla każdego n istnieje r_n takie, że $x_n < a - \frac{1}{r_n}$. Stąd

$$f(x_n) < f\left(a - \frac{1}{r_n}\right) \leqslant g\,, \quad \text{więc} \quad g - f(x_n) > 0\,.$$

Wnosimy stąd, że $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = g$.

Uwaga 1. Twierdzenie 1 daje się uogólnić zarówno na funkcje monotoniczne nieograniczone, jak i na $a = \pm\infty$. Może być ono również zapisane w następującej, nieco ogólniejszej, postaci:

Jeżeli funkcja f jest monotoniczna (w szerszym sensie) i ograniczona, to granice $\lim\limits_{x=a\pm 0} f(x)$ istnieją w każdym punkcie a.

Dowód jest całkowicie analogiczny.

TWIERDZENIE 2. *Jeśli funkcja f nie posiada granicy (skończonej) w punkcie a, to istnieje ciąg $\{x_n\}$ taki, że $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ oraz ciąg $\{f(x_n)\}$ jest rozbieżny.*

Przypuśćmy bowiem, że dla każdego ciągu $\{x_n\}$ tego rodzaju ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny. Ponieważ funkcja f nie posiada granicy w punkcie a, więc istnieć muszą dwa ciągi $\{x_n\}$ i $\{x'_n\}$, czyniące zadość naszym założeniom i takie, że $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n=\infty} f(x'_n)$. Weźmy pod uwagę ciąg $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots$ Ciąg ten jest zbieżny do a, składa się z samych wyrazów różnych od a, zarazem ciąg $f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \ldots$ jest rozbieżny.

Twierdzenie następujące zawiera tzw. *definicję Cauchy'ego* granicy funkcji w punkcie.

TWIERDZENIE 3. *Na to, żeby zachodziła równość $\lim\limits_{x=a} f(x) = g$, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie $\delta > 0$, że nierówność $0 < |x-a| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x)-g| < \varepsilon$.*

Przypuśćmy najpierw, że warunek Cauchy'ego nie jest spełniony, tj. że istnieje takie $\varepsilon > 0$, że przy każdej wartości na $\delta > 0$ istnieje takie x, że

$$0 < |x-a| < \delta\,, \quad \text{a} \quad |f(x)-g| \geqslant \varepsilon\,.$$

W szczególności więc, podstawiając $\delta = 1/n$, wnosimy, że istnieje ciąg $\{x_n\}$ taki, że

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \tag{23}$$

oraz

$$|f(x_n) - g| \geqslant \varepsilon\,. \tag{24}$$

Z nierówności (23) wynika, że $\lim_{n=\infty} x_n = a$ oraz $x_n \neq a$. Gdyby więc przypuścić, że $\lim_{x=a} f(x) = g$, to mielibyśmy $\lim_{n=\infty} f(x_n) = g$. Lecz ta ostatnia równość jest sprzeczna z nierównością (24).

Udowodniliśmy w ten sposób, że warunek Cauchy'ego jest koniecznym warunkiem zachodzenia równości $\lim_{x=a} f(x) = g$.

Udowodnimy obecnie, że jest to również warunek wystarczający.

Niech więc dane będzie $\varepsilon > 0$ i niech $\lim_{n=\infty} x_n = a$ oraz $x_n \neq a$. Na mocy warunku Cauchy'ego istnieje $\delta > 0$ takie, że nierówność $0 < |x_n - a| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x_n) - g| < \varepsilon$. Ze względu na równość $\lim_{n=\infty} x_n = a$, nierówność $|x_n - a| < \delta$ zachodzi dla wszystkich n, poczynając od pewnego k. Dla tych samych n mamy więc nierówność $|f(x_n) - g| < \varepsilon$. Znaczy to, że $\lim_{n=\infty} f(x_n) = g$. Stąd wnosimy, że $\lim_{x=a} f(x) = g$.

Odpowiednikiem twierdzenia Cauchy'ego z teorii ciągów (§ 2.7) jest

TWIERDZENIE 4. *Na to, żeby istniała granica (skończona) funkcji f w punkcie a, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie $\delta > 0$, że warunki*

$$0 < |x - a| < \delta \quad i \quad 0 < |x' - a| < \delta \tag{25}$$

pociągają za sobą $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Istotnie, warunek nasz jest konieczny, bo jeśli $\lim_{x=a} f(x) = g$, to dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że warunek $0 < |x - a| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x) - g| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Jeśli więc warunki (25) są spełnione, to zachodzą nierówności

$$|f(x) - g| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{i} \quad |f(x') - g| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Dodając te nierówności, otrzymujemy $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Warunek jest dostateczny. Przypuśćmy bowiem, że granica funkcji f w punkcie a nie istnieje. Istnieje wówczas na mocy twierdzenia 2 taki ciąg $\{x_n\}$, że $\lim_{n=\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ oraz że ciąg $\{f(x_n)\}$ jest rozbieżny. Załóżmy zarazem, że warunek sformułowany w twierdzeniu jest spełniony. Ponieważ z równości $\lim_{n=\infty} x_n = a$ wynika, że istnieje takie k, że dla $n \geqslant k$ można w nierównościach (25) podstawić $x = x_n$ i $x' = x_k$, przeto $|f(x_n) - f(x_k)| < \varepsilon$. Na mocy twierdzenia Cauchy'ego o ciągach wnosimy stąd, że ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny — wbrew naszemu założeniu.

Uwaga 2. Dla $a = \infty$ twierdzenia 3 i 4 dają się sformułować, jak następuje:

TWIERDZENIE 3'. *Na to, żeby zachodziła równość $\lim_{x=\infty} f(x) = g$, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie r, że nierówność $x > r$ pociąga za sobą $|f(x) - g| < \varepsilon$.*