

# Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Antoni Kościelski

## 1 Pierwiastki

Bywa, że matematycy (a także informatycy) rozważają pierwiastkowanie. Aby zajmować się o tą operacją, musimy mieć jakieś liczby, a właściwie pewną algebrę, której elementy potrafimy dodawać i mnożyć (czasem wystarczy samo mnożenie). Działania te powinny mieć takie własności, jak dodawanie i mnożenie w zbiorze liczb rzeczywistych. Takie algebry nazywamy ciałami, a najbardziej znanymi są ciała liczb wymiernych, rzeczywistych i zespolonych. Informatycy czasem wykorzystują pierwiastkowanie w ciałach skończonych (są też takie).

W wyniku pierwiastkowania otrzymujemy pierwiastki. Pierwiastek  $n$ -tego stopnia z  $a$  spełnia równie  $x^n = a$  (a więc jest pierwiastkiem tego równania, jak już widać słowo *pierwiastek* ma wiele znaczeń). Czasem przyjmujemy – na przykład, gdy pierwiastkujemy liczby rzeczywiste – że spełnia jeszcze dodatkowe warunki. Wiele własności pierwiastków jest omawiane w szkole średniej, inne – są łatwe do zauważenia. W liczbach wymiernych pierwiastkowanie jest wykonalne sporadycznie (na przykład liczbę  $9/25$  możemy spierwiastkować, a  $8/25$  – nie). W liczbach rzeczywistych każda liczba ma dokładnie jeden pierwiastek 3 stopnia, za to równanie  $x^2 = a$  ma dwa rozwiązania dla każdej dodatniej liczby  $a$ , a dla ujemnej liczby  $a$  nie ma ich wcale.

Wiadomo, że każda liczba (każdy element ciała) może mieć najwyżej  $n$  pierwiastków  $n$ -tego stopnia. Dość łatwo przekonać się o tym korzystając z teorii podzielności wielomianów.

## 2 Wzory de Moivre’a

Będziemy zajmować się pierwiastkowaniem liczb zespolonych. Jest rzeczą znaną, że każdą liczbę zespoloną  $z$  można przedstawić w postaci trygonometrycznej

$$z = m \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie  $m$  jest nieujemną liczbą rzeczywistą zwaną modułem  $z$ , a  $\varphi$  jest liczbą, która może być interpretowana jako miara pewnego kąta, może być – poza przypadkiem  $z = 0$  – wybrana jednoznacznie z przedziału  $[0, 2\pi)$  i jest nazywana argumentem  $z$ .

Wzory de Moivre’a mówią, jak mnożyć liczby zespolone dane w postaci trygonometrycznej, a więc jeżeli

$$z_1 = m_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{oraz} \quad z_2 = m_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

to

$$z_1 z_2 = m_1 m_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Aby znaleźć postać trygonometryczną iloczynu powinniśmy więc zgodnie z podanym wzorem wymnożyć moduły i dodać argumenty. Łatwo się o tym przekonać korzystając z wzorów na cosinus i sinus sumy kątów.

Z podanych wzorów de Moivre'a możemy wyprowadzić analogiczne wzory dotyczące potęgowania. Dla liczb naturalnych  $n$  mamy

$$(m \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = m^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

a także wzory dotyczące pierwiastkowania

$$m \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \left(\sqrt[n]{m}\right)^n \cdot \left(\cos\left(n\frac{\varphi}{n}\right) + i \sin\left(n\frac{\varphi}{n}\right)\right) = \left(\sqrt[n]{m} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \sin\frac{\varphi}{n}\right)\right)^n.$$

Z tego ostatniego wzoru wynika, że w liczbach zespolonych każda liczba ma pierwiastki dowolnego stopnia. Pierwiastkiem  $n$ -tego stopnia ( $n$  to liczba naturalna) z liczby  $z = m \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$  (być może jednym z wielu) jest liczba

$$\sqrt[n]{m} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

### 3 Liczba pierwiastków $n$ -tego stopnia

Liczba 0 jest wyjątkowa. Pokażemy więc tylko, że wszystkie inne liczby mają tyle samo pierwiastków  $n$ -tego stopnia, a dokładniej: tyle samo, co liczba 1.

Przypuśćmy, że liczby

$$z_1, z_2, \dots, z_m$$

są wszystkimi możliwymi, różnymi pierwiastkami  $n$ -tego stopnia z liczby  $z \neq 0$  (czyli spełniają równość  $z_i^n = z$ ). Wtedy oczywiście liczby

$$\frac{z_1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_m}{z_1}$$

są różnymi pierwiastkami  $n$ -tego stopnia z 1 (choć niekoniecznie wszystkimi).

Z drugiej strony, jeżeli liczby

$$e_1, e_2, \dots, e_m$$

są wszystkimi możliwymi, różnymi pierwiastkami  $n$ -tego stopnia z 1, a  $z_0$  jest jednym z pierwiastków  $n$ -tego stopnia z  $z$  (wiemy już, że istnieje przynajmniej jedno  $z_0$ ), to liczby

$$z_0 \cdot e_1, z_0 \cdot e_2, \dots, z_0 \cdot e_m$$

są różnymi pierwiastkami  $n$ -tego stopnia z  $z$  i – być może – są jeszcze inne.

Z przedostatniego akapitu wynika, że niezerowa liczba  $z$  ma najwyżej tyle pierwiastków  $n$ -tego stopnia, co 1, z ostatniego – że ma najwyżej tyle. Tak więc każda niezerowa liczba zespolona ma tyle pierwiastków  $n$ -tego stopnia, co 1. Co więcej, znając wszystkie pierwiastki  $n$ -tego stopnia z 1 i jeden taki pierwiastek z liczby  $z$ , potrafimy – jak w poprzednim akapicie – wymienić wszystkie pierwiastki  $n$ -tego stopnia z liczby  $z$ .

## 4 Raz jeszcze o postaci trygonometrycznej

Przyjrzymy się raz jeszcze nieco dokładniej postaci trygonometrycznej liczby zespolonej  $z = a + bi$  o module 1 (a więc takiej, że  $a^2 + b^2 = 1$ ). Aby znaleźć takie postacie musimy rozwiązać następujące równanie trygonometryczne:

$$\cos \varphi = a \quad \text{oraz} \quad \sin \varphi = b. \quad (1)$$

W tym celu najpierw szukamy jednego rozwiązania tego równania. W szkole pierwsze rozwiązanie po prostu odgadujemy korzystając z wiedzy o własnościach funkcji trygonometrycznych i ich wartościach dla niektórych kątów. Pozwala to rozwiązać podany układ chyba dla 16 par liczb  $a$  i  $b$  (które są liczbami wymiernymi i ich pierwiastkami). Wiedza z dokładniejszych tablic pozwala to samo zrobić może dla 48 par (będących sumami dwóch pierwiastków liczb wymiernych). Dalej piętrzą się coraz większe trudności. Matematycy dowodzą jednak, że wszystkie takie równania mają rozwiązania, a przybliżone wartości rozwiązań można znaleźć za pomocą tablic funkcji trygonometrycznych lub odpowiednich programów.

Przyjmijmy, że mamy jedno z rozwiązań  $\bar{\varphi}$  układu (1), czyli taką liczbę, że

$$\cos \bar{\varphi} = a \quad \text{oraz} \quad \sin \bar{\varphi} = b.$$

Przydałoby się jeszcze opisać wszystkie rozwiązania układu

$$\cos \varphi = \cos \bar{\varphi} \quad \text{oraz} \quad \sin \varphi = \sin \bar{\varphi}.$$

Można to zrobić metodami szkolnymi: okazuje się, że każde rozwiązanie  $\varphi$  tego układu różni się od  $\bar{\varphi}$  o całkowitą wielokrotność  $2\pi$ , a więc są to dokładnie liczby postaci

$$\varphi = \bar{\varphi} + 2 \cdot k \cdot \pi \quad \text{dla pewnej liczby całkowitej } k.$$

Z tego wynikają dwa wnioski: po pierwsze, każdy układ (1) ma rozwiązanie  $\varphi$  w przedziale  $[0, 2\pi)$ , a ponadto żadne dwie liczby z przedziału  $[0, 2\pi)$  nie mogą jednocześnie spełniać układu (1).

## 5 Pierwiastki $n$ -tego stopnia z 1

Mamy już metodę konstruowania pierwiastków  $n$ -tego stopnia. Aby skonstruować wiele takich pierwiastków wykorzystamy niejednoznaczność przedstawienia liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej. Oczywiście, liczbę 1 można przedstawić na następujące sposoby:

$$\dots = \cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi) = \cos 0 + i \sin 0 = 1 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = \cos 4\pi + i \sin 4\pi = \dots$$

Z wzorów de Moivre'a wynika, że następujące liczby są pierwiastkami  $n$ -tego stopnia z 1:

$$\dots, \cos \frac{-2\pi}{n} + i \sin \frac{-2\pi}{n}, \cos \frac{0}{n} + i \sin \frac{0}{n}, \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}, \dots$$

Liczby te powtarzają się cyklicznie i są wśród nich liczby

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Nietrudno zauważyć, że argumenty wymienionych liczb są z przedziału  $[0, 2\pi)$  i są parami różne. Stąd wynika, że wymienione pierwiastki są parami różne i jest ich  $n$ , a więc zostały wymienione wszystkie możliwe pierwiastki  $n$ -tego stopnia z 1 (nie może być ich więcej niż  $n$ ). Liczba 1 (i wszystkie niezerowe liczby zespolone) mają tyle pierwiastków  $n$ -tego stopnia, ile mogą ich mieć.

Łącząc przedstawione rezultaty otrzymujemy, że niezerowa liczba zespolona  $m(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  ma  $n$  pierwiastków  $n$ -tego stopnia danych wzorami

$$\sqrt[n]{m} \cdot \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

dla  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

Przedstawione rozumowanie można nieco skrócić wykorzystując niejednoznaczność postaci trygonometrycznej dowolnej liczby zespolonej. Wtedy jednak dostarczałoby trochę mniej informacji o pierwiastkowaniu liczb zespolonych.