Zadanie z analizy

Antoni Kościelski

13 grudnia 2021

1 Sformułowanie zadania

Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1}.$$

2 Rozwiązanie

Najpierw dane wyrażenie przekształcamy do przydatnej postaci:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1-\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} - 1$$

oraz

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{x^2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

Mamy więc nastepującą równość

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1} = x \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} - 1.$$

Z ciągłości pierwiastka oraz twierdzeń o granicy iloczynu i ilorazu otrzymujemy, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = 1.$$

Ostatecznie otrzymujemy, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} - 1 = -1. \ \square$$