5 grudnia 2023

Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 10

1. Załóżmy, że grafy G_1 i G_2 są określone na tym samym zbiorze wierzchołków $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Podaj algorytm o złożoności $O(n + m)$ sprawdzający, czy G_1 i G_2 wczytane jako listy krawędzi grafów są identyczne.

2. Podaj przykłady (o ile istnieją):
   (a) grafu prostego o ciągu stopni wierzchołków 1,2,2,3,3;
   (b) grafu prostego o ciągu stopni wierzchołków 1,1,1,3,4;
   (c) grafu prostego dwudzielnego o ciągu stopni wierzchołków 2,2,2,2,2.

3. *Średnicą* $d(G)$ grafu G nazywamy maksymalną odległość między wierzchołkami grafu, to znaczy $d(G) = \max\{d(x, y)|x, y \in V(G)\}$. Udowodnij, że jeżeli $d(G) > 3$, to $d(\bar{G}) < 3$.

4. Udowodnij, że jeżeli $d(G) = 2$ i $\max\{\deg(v)|v \in V(G)\} = n - 2$, to $m \geq 2n - 4$.

5. Dla każdego wierzchołka v grafu $G = (V, E)$ definiujemy $r(v) = \max\{d(v, u)|u \in V(G)\}$. Wierzchołek x_0, dla którego $r(x_0) = \min\{r(v)|v \in V(G)\}$ nazywamy *wierzchołkiem centralnym*, a liczbę $r(G) = r(x_0)$ *promieniem* grafu G.
   (a) Udowodnij, że $r(G) \leq d(G) \leq 2 \cdot r(G)$,
   (b) (Jordan). Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo dwóch sąsiednich.
   (c) Podaj algorytm wyznaczania wierzchołka centralnego w drzewie oraz określ jego złożoność.

6. Graf prosty G jest samodopełniający wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzny ze swym dopełnieniem. Pokaż, że samodopełniający graf n wierzchołkowy istnieje dokładnie wtedy, gdy $n \equiv 0$ lub $n \equiv 1$ modulo 4.

   Wsk.: Gdy $n \equiv 0$ możesz oprzeć konstrukcję na podziale zbioru V na cztery części. Gdy $n \equiv 1$ do poprzedniej konstrukcji można dodać jeden wierzchołek.

7. Niech $C_1, C_2, \ldots, C_{m-n-1}$ będą zbiorami krawędzi wszystkich $m - n + 1$ cykli otrzymanych poprzez dodanie do drzewa spinającego T grafu prostego G jednej krawędzi G która nie należy do T. Pokaż, że zbiór krawędzi dowolnego cyklu w G jest różnicą symetryczną pewnej liczby zbiorów wybranych spośród $C_1, C_2, \ldots, C_{m-n-1}$.

8. *Grafem krawędziowym* $L(G)$ grafu G nazywamy graf, którego wierzchołkami są krawędzie G i miedzy $e_1, e_2 \in E(G)$ jest krawędź gdy e_1 i e_2 mają wspólny wierzchołek w G. Niech B będzie macierzą incydencji G, C macierzą sąsiedztwa $L(G)$, a I macierzą identycznościową. Pokaż, że $C = B^T B - 2I$.

9. Udowodnij, że w grafie G, w którym maksymalny stopień wierzchołka wynosi p, promień grafu spełnia nierówność:
$$r(G) \geq \frac{\log(np - n + 1)}{\log(p)} - 1.$$

10. Ile jest n-wierzchołkowych drzew poetykietowanych, w których każdy wierzchołek i ma dany stopień d_i? Najpierw określ jaki warunek musi spełniać ciąg d_i.

11. Losujemy drzewo o wierzchołkach $\{1, 2, \ldots, n\}$ (każde drzewo jest tak samo prawdopodobne). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wierzchołek 1 jest liściem? Do czego prawdopodobieństwo to dąży przy $n \to \infty$?

12. Pokaż, że dla $n > 2$ istnieją n^{n-3} rozróżnialne drzewa n wierzchołkowe z krawdziami ponumerowanymi od 1 do $n - 1$.

13. Pokaż, że każdy graf nie zawierający trójkątów (cykli długości 3) ma nie więcej, niż $\lfloor n^2/4 \rfloor$ krawędzi.

   Wsk.: Rozważ osobno n parzyste i nieparzyste

14. Niech G będzie grafem prostym o minimalnym stopniu wierzchołka $d > 1$. Pokaż, że G zawiera cykl o długości równej co najmniej $d + 1$.

15. Graf jest 2-spójny wtedy i tylko wtedy gdy jest spójny i nie zawiera wierzchołka rozcinającego. Pokaż, że następujące dwa warunki są równoważne 2-spójności grafu o co najmniej trzech wierzchołkach
   (a) każde dwa wierzchołki leżą na cyklu,
   (b) każde dwie krawędzie leżą na cyklu.