14 listopada 2023

Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 6

1. Rozważając liczbę sposobów wybrania spośród n osób delegacji z jej przewodniczącym zinterpretuj wzór

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

2. Ile ciągów k jedynek i l zer takich że między każdymi dwoma kolejnymi jedynkami jest przynajmniej jedno zero?

3. Oblicz, ile jest liczb naturalnych między 1 i n (włącznie z tymi liczbami), które są podzielne przez 2 lub 3 ale nie dzielą się ani przez 5 ani przez 7.

4. Ile jest takich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że żadna z liczb $i \in \{1, 2, \ldots, k\}, (k < n)$ nie znajdzie się na pozycji i?

5. *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Pokaż, że

$$d_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

6. Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Ile rozwiązań w liczbach całkowitych $0 \le x_i \le 10$ ma równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = m?$$

7. Ile jest takich ciągów składających się z α liter a, β liter b i γ liter c, w których litery jednego rodzaju nie tworzą jednego bloku?

8. Pokaż, że

$$\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - \min\{a_1, a_2\} - \min\{a_1, a_3\} - \cdots - \min\{a_{n-1}, a_n\} +$$
$$+ \min\{a_1, a_2, a_3\} + \cdots \pm \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

9. Na ile sposobów można rozsadzić przy okrągłym stole n par wrogów tak, by żadna z tych par nie siedziała obok siebie.

10. Na ile sposobów można rozsadzić przy okrągłym stole n par małżeńskich tak by mężczyżni i kobiety siedzieli naprzemian i żadna para nie siedziała obok siebie?

11. Udowodnij, że liczba permutacji $\pi \in S_n$ posiadających w rozbiciu na cykle odpowiednio $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ cykli długości $1, 2, 3, \ldots$ jest równa

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n!}.$$

12. Które z poniższych zbiorów tworzą podgrupy grupy S_5:
    (a) $\{\mathrm{id}, (12345), (13524), (14253), (15432)\}$.
    (b) $\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
    (c) $\{\mathrm{id}, (12)(345), (135)(24), (15324), (12)(45), (134)(25), (143)(25)\}$.

13. Niech grupa G działa na zbiorze X i $|G| = 2^k$, a $|X|$-nieparzyste. Pokaż, że w X istnieje taki element, który jest punktem stałym wszystkich przekształceń z G.

14. Oblicz rząd grupy symetrii dwunastościanu foremnego.

15. Ośmiościenna kostka do gry to ośmiościan foremny z liczbami od 1 do 8 przyporządkowanymi ścianom. Ile jest różnych ośmiościennych kostek do gry? Ile z nich jest prawidłowych (tzn. suma oczek na każdych 2 przeciwległych ścianach wynosi 9)?

    Wsk.: Policz rząd grupy obrotów ośmiościanu foremnego

16. Dane są karty 3 pola na 3. W każdym z pól możemy zrobić dziurkę. Karty są na tyle symetryczne, że możemy je obracać wokół środka i odwracać na drugą stronę nie wiedząc potem w jakiej pozycji były one na początku. Używając lematu Burnside'a pokaż, że istnieje 8 rozróżnialnych kart 3×3 z dwoma dziurkami. Narysuj te karty.

17. Oblicz ile jest rozróżnialnych naszyjników złożonych z p kamieni (p-liczba pierwsza). Możemy kamienie te wybrać dysponując nieograniczoną liczbą nierozróżnialnych kamieni białych i czarnych.

18. Dwa rozłożenia nieatakujących się wież na szachownicy uważamy za równoważne, jeśli jedno z drugiego można otrzymać przez symetrię lub obrót (lub gdy są identyczne). Oblicz liczbę nierównoważnych rozłożeń ośmiu wzajemnie nieatakujących się wież.