3 stycznia 2017

Zadania z kombinatoryki, lista nr 9

1. Pokaż, że wobec lematu Burnside'a n nierozróżnialnych przedmiotów można umieścić w m ponumerowanych pudełkach na $\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]m^k$ sposobów. Z drugiej jednak strony sposobów tych jest $\binom{m+n-1}{n}$. Korzystając z tej zależności udowodnij, że
$$\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]x^k = x^{\overline{n}}.$$

2. Znajdź indeks cyklowy grupy obrotów sześcianu traktowanej jako grupa permutacji
   (a) ścian
   (b) wierzchołków

   Pokaż że ta pierwsza grupa permutacji jest identyczna z grupą obrotów wierzchołków ośmiościanu.

3. Powtórz poprzednie zadanie dla grup izometrii sześcianu.

4. Znajdź indeksy cyklowe grupy wszystkich permutacji n-elementowych S_n i grupy permutacji parzystych A_n. Rozpisz indeksy cyklowe S_2, S_3, S_4 i A_2, A_3, A_4.

5. Rozpisz funkcję tworzącą ciągu t_k oznaczającego liczby istotnie różnych czarno-białych kolorowań ścian sześcianu w których k ścian jest czarnych. Ile jest łacznie kolorowań ścian sześcianu na 2 kolory.

6. Oblicz liczbę istotnie różnych kolorowań ścian czworościanu, sześcianu i ośmiościanu na k kolorów. Ile jest istotnie różnych kolorowań ścian sześcianu na czerwono, zielono i niebiesko takich, że 3 ściany są czerwone, 2 zielone i jedna niebieska?

7. Niech $\phi(n)$ będzie funkcją Eulera. Pokaż, że grupa obrotów n-kąta foremnego jako grupa permutacji wierzchołków ma indeks cyklowy
$$Z = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\phi(d)x_d^{n/d}.$$
   Pokaż, że grupa izometrii n-kąta dla n nieparzystego ma indeks cyklowy
$$Z = \frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\phi(d)x_d^{n/d} + nx_1x_2^{(n-1)/2}\right).$$
   Oblicz indeks cyklowy grupy izometrii dla n parzystego.

8. Niech grupa G działa na zbiorze A ($|A| = n$), którego elementy kolorujemy trzema kolorami. Liczbę istotnie różnych kolorowań w których dla $i = 1, 2, 3$ kolor i ma n_i elementów oznaczamy przez $o_{n_1n_2n_3}$. Pokaż, że
$$\sum_{n_i: n_1+n_2+n_3=n} o_{n_1n_2n_3}x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3} = Z(G, x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3, \cdots).$$
   Uogólnij ten wzór na k kolorów.

9. Graf prosty nazywamy *samodopełniającym* jeśli jest izomorficzny ze swoim dopełnieniem. Pokaż, że liczba nieizomorficznych n-wierzchołkowych grafów samodopełniających wynosi
$$Z(S_n^{(2)}; 0, 2, 0, 2, \ldots).$$

10. Naszyjnik jest *symetryczny* gdy ma oś symetrii. Jak można obliczyć liczbę istotnie różnych naszyjników symetrycznych o n kamieniach z których każdy może być czerwony lub niebieski?