

Zadania z kombinatoryki, lista nr 7

1. Pokaż, że splot Dirichleta dwóch funkcji multiplikatywnych jest funkcją multiplikatywną.
2. Pokaż, że dla dowolnego posetu
 - (a) $\mu(x, x) = 1$
 - (b) jeśli y jest bezpośrednim następnikiem x , to $\mu(x, y) = -1$
 - (c) $\zeta^2(x, y) = |[x, y]|$
 - (d) $(2\delta - \zeta)^{-1}(x, y)$ istnieje i jest równe liczbie łańcuchów o początku w x i końcu w y .
3. Pokaż, że algebra incydencji ze splotem jest przemienna wtedy i tylko wtedy gdy P jest antyłańcuchem (tzn. nie zawiera żadnych relacji).

4. Pokaż, że dla ciągów a_n, b_n

$$(a) \quad b_n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} a_k \Leftrightarrow a_n = \sum_k (-1)^{n-k} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] b_k$$

$$(b) \quad b_n = \sum_k \binom{n}{k} a_k \Leftrightarrow a_n = \sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$$

5. Niech s_{nm} będzie liczbą funkcji z $\{1, \dots, n\}$ na $\{1, \dots, m\}$.

- (a) Pokaż, że

$$m^n = \sum_k \binom{m}{k} s_{nk}$$

- (b) Wykorzystując poprzednie zadanie znajdź jawny wzór na s_{nm}

6. Liczbę Laha definiujemy następująco:

$$L(k, n) = (-1)^n \frac{n!}{k!} \binom{n}{k}$$

Pokaż, że w $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq)$ mamy $L^{-1}(k, n) = L(k, n)$.

7. (Uogólniona zasada włączania – wyłączenia) Pokaż, że

$$\sum_{m=k}^n (-1)^{m-k} \binom{n}{m} \binom{m}{k} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k = n \\ 0 & \text{gdy } k < n. \end{cases}$$

Niech \mathcal{F} będzie rodziną zbiorów, a v_k liczbą elementów należących do dokładnie k zbiorów z \mathcal{F} . Niech

$$u_0 = |\Omega|, \quad u_i = \sum_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}: |\mathcal{A}|=i} \left| \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \right|.$$

Pokaż, że: $v_k = \sum_{m \geq k} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} u_m$.

Zinterpretuj wzór na v_0 jako standardową zasadę włączania – wyłączenia.

8. Pokaż, że: $\sum_{k=1}^m (-2)^{k-1} \binom{m}{k} = \begin{cases} 0 & \text{dla parzystego } m \\ 1 & \text{dla nieparzystego } m. \end{cases}$

Następnie udowodnij wzór: $|A_1 \div A_2 \div \dots \div A_n| = \sum_{k > 0} (-2)^{k-1} u_k$,

gdzie $A \div B$ oznacza różnicę symetryczną, a u_k jest oznaczeniem z poprzedniego zadania.

9. Niech $\pi(n)$ oznacza ilość liczb pierwszych p nie większych od n . Niech $\mu(d)$ oznacza $\mu(1, d)$ w kracie $(\mathbb{N}, |)$. Wykaż, że

$$(a) \quad \pi(n) - \pi(\sqrt{n}) = n - 1 - \sum_{p \leq \sqrt{n}} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \sum_{p, q \leq \sqrt{n}} \left\lfloor \frac{n}{pq} \right\rfloor - \sum_{p, q, r \leq \sqrt{n}} \left\lfloor \frac{n}{pqr} \right\rfloor + \dots$$

$$(b) \quad 0 = -1 + \sum_{d=1}^n \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor.$$