

### Zadania z kombinatoryki, lista nr 6

1. Niech  $\varphi(n)$  będzie funkcją Eulera. Pokaż, że

$$n = \sum_{d:d|n} \varphi(d).$$

Wyprowadź z tego wzoru wzór na  $\varphi(n)$  i porównaj go ze wzorem

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

2. Wyznacz funkcje tworzące Dirichleta (wyraż je za pomocą funkcji  $\zeta(x)$ ) następujących funkcji

- (a)  $\ln n$ ,
- (b)  $\sigma_n$  równego sumie dzielników  $n$ ,
- (c)  $|\mu(n)|$ ,
- (d)  $\varphi(n)$ ,
- (e)  $n^a$ ,
- (f)  $\sum_{d|n} d^a$ .

Które z tych funkcji są multiplikatywne?

3. Funkcja  $f(n)$  jest *silnie multiplikatywna* gdy  $f(mn) = f(m)f(n)$  dla każdej pary  $m, n$ . Niech  $\lambda_n$  będzie silnie multiplikatywną funkcją taką, że  $\lambda(1) = 1$  i  $\lambda(p) = -1$  dla wszystkich pierwszych  $p$ . Pokaż, że

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n \text{ jest kwadratem} \\ 0 & \text{gdy } n \text{ nie jest kwadratem.} \end{cases}$$

Pokaż też, że

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}.$$

4. Znajdź liczbę ciągów pierwotnych długości  $n$  złożonych z elementów  $1, 2, \dots, k$ .
5. Pokaż, że wielomiany cyklotomiczne mają współczynniki całkowite.
6. Rozważamy koła podzielone na  $n$  przystających sektorów (jak w ruletce), z których każdy pomalowany jest jednym z  $k$  kolorów. Dwa koła nie są istotnie różne jeśli jedno przechodzi na drugie przez obrót. Niech  $s_n$  będzie liczbą takich istotnie różnych kół. Niech  $c_n$  będzie liczbą istotnie różnych kół, które nie przechodzą same na siebie przez obrót różny od identyczności.

(a) Pokaż, że  $\sum_{d|n} c_d = s_n$  i  $\sum_{d|n} dc_d = k^n$ .

(b) Korzystając ze wzoru inwersyjnego wylicz  $c_n$ . Pokaż, że  $s_n = \sum_{d|n} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) k^d$ .

7. Wykaż, że istnieje dokładnie jedna funkcja  $\Lambda$  spełniająca warunek

$$\sum_{d:d|n} \Lambda(d) = \ln n$$

Pokaż, że  $\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{gdy } n = p^k \\ 0 & \text{gdy } n \text{ nie jest potęgą liczby pierwszej.} \end{cases}$

Udowodnij też, że

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$