17 listopada 2016

Zadania z kombinatoryki, lista nr 5

1. Rozwiń w szereg potęgowy funkcję $x/\sin x$.

2. Napisz wzory na $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^8$ i $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8}$.

3. Pokaż, że
$$\cos(mx) = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{2m-1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

4. Pokaż, że
$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \sum_{k,j\geq 0} \left\{ {m \atop j} \right\} \left[{j+1 \atop k} \right] \frac{(-1)^{j+1-k}}{j+1} n^k.$$
Jaka z powyższej równości wynika zależność między liczbami Bernoulliego i Stirlinga?

5. Wykaż, że
$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{k+1} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

6. Udowodnij wzory
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\langle {n \atop k} \right\rangle = 2^{n+1}(2^{n+1}-1)\frac{B_{n+1}}{n+1}$,
   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{n}{k}^{-1} = (n+1)B_n$.

7. Pokaż, że dla wielomianów Bernoulliego prawdziwe są następujące stwierdzenia
   - Jeśli m jest parzyste, to $B_m(1/2-x) = B_m(1/2+x)$.
   - Jeśli m jest nieparzyste, to $B_m(1/2-x) = -B_m(1/2+x)$ i jedynym miejscem zerowym $B_m(x)$ w przedziale $(0,1)$ jest $x = 1/2$.

   Wywnioskuj z tego, że dla parzystego m wielomian $B_m(x)$ przyjmuje w przedziale [0,1] wartości największe co do modułu albo na jego końcach, albo dla $x = 1/2$. Pokaż też, że $B_m(1/2) = (2^{1-m}-1)B_m$ dla wszystkich $m \geq 0$. Udowodnij, że jeśli m jest parzyste, to
$$\max_{x\in[0,1]} |B_m(x)| = |B_m|.$$

8. Jakie oszacowania na B_{2n} wynikają ze wzoru
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}?$$

9. W jaki sposób można zastosować wzór Eulera-Maclaurina do przyspieszenia zbieżności wolno zbieżnego ciągu $\sum_{k=1}^{n} 1/k^3$?