

## Zadania z kombinatoryki, lista nr 4

1. Podział zbioru  $\{1, \dots, n\}$  na ciągi to zbiór ciągów, takich że każda z liczb  $1, \dots, n$  występuje w nim dokładnie raz. Np. wszystkie możliwe podziały  $\{1, 2\}$  to  $\{(1), (2)\}$ ,  $\{(1, 2)\}$  oraz  $\{(2, 1)\}$ . Niech  $a_n$  oznacza ilość różnych podziałów zbioru  $\{1, \dots, n\}$  na ciągi, przyjmijmy, że  $a_0 = 1$ . Udowodnij, że

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k+1)! a_{n-k}$$

i następnie oblicz wykładniczą funkcję tworzącą ciągu  $a_n$ .

2. Dla każdej permutacji  $\pi = \pi_1, \dots, \pi_n$  zbioru  $\{1, \dots, n\}$  niech  $\alpha(\pi) = |\{i : \pi_i < \pi_{i+1}\}|$  będzie liczbą wzniesień permutacji  $\pi$ . Liczby Eulera  $\langle n \rangle_k$  definiujemy następująco:

$$\langle n \rangle_k = |\{\pi : \alpha(\pi) = k\}|.$$

Udowodnij, że

$$(a) \quad \langle n \rangle_k = (k+1) \langle n-1 \rangle_k + (n-k) \langle n-1 \rangle_{k-1}$$

$$(b) \quad n! = \sum_k \langle n \rangle_k$$

$$(c) \quad \langle n \rangle_k = \langle n-k-1 \rangle_n$$

$$(d) \quad m^n = \sum_k \langle n \rangle_k \binom{m+k}{n}$$

$$(e) \quad x^n = \sum_k \langle n \rangle_k \frac{(x+k)^n}{n!}$$

$$(f) \quad \langle n \rangle_k = \sum_i (-1)^i (k-i+1)^n \binom{n+1}{i}$$

$$(g) \quad \sum_k \langle n \rangle_k \binom{k}{n-m} = m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$$

3. Pokaż, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \left( \sum \langle n \rangle_i x^{n-i} \right).$$

4. Udowodnij wzory

$$(a) \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k}$$

$$(b) \quad \left[ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \sum_k \left[ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right] \binom{k}{m} (-1)^{m-k}$$

$$(c) \quad m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = \sum_k \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k}$$

$$(d) \quad \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\} (m+1)^{n-k}$$

$$(e) \quad \left\{ \begin{matrix} m+n+1 \\ m \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^m \left\{ \begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right\} k$$

$$(f) \quad \left[ \begin{matrix} m+n+1 \\ m \end{matrix} \right] = \sum_{k=0}^m \left[ \begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right] (n+k)$$

$$(g) \quad \binom{n}{m} = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} \left[ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right] (-1)^{m-k}$$