

Zadania z kombinatoryki, lista nr 3

1. Pokaż, że

$$(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k};$$

$$(x+y)^{\bar{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\bar{k}} y^{\overline{n-k}}.$$

2. Pokaż że

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$$

$$\sum_{k=1}^n k^{\bar{m}} = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}$$

3. Pokaż, że liczba k elementowych podzbiorów zbioru $\{1, \dots, n\}$ nie zawierających żadnej pary kolejnych liczb wynosi

$$\binom{n-k+1}{k}.$$

4. Niech $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ i $M(n)$ oznacza liczbę k , dla której wartość $\binom{n}{k}$ jest największa (jeśli istnieje więcej takich k , to wybieramy największe z nich). Pokaż że ciąg $\binom{n}{k}$ jest rosnący dla pewnej ilości początkowych k , potem dla co najwyżej dwóch liczb k przyjmuje wartość największą, a następnie jest malejący dla wszystkich pozostałych k . Udowodnij też, że $0 \leq M(n) - M(n-1) \leq 1$.5. Mówimy, że permutacja π ma minimum lokalne w π_i , jeśli $\pi_j > \pi_i$ dla wszystkich $j < i$. Pokaż, że liczba permutacji n elementów o dokładnie k minimach lokalnych równa jest $\binom{n}{k}$.6. Pokaż, że średnia liczba cykli dla losowo wybranej permutacji n elementów wynosi

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n!} \sum_k k \binom{n}{k}$$

7. Udowodnij wzory:

$$(a) \binom{n}{k} = \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_{n-k} < n} m_1 m_2 \dots m_{n-k}$$

$$(b) \left\{ \binom{n}{k} \right\} = \sum_{0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_{n-k} \leq k} m_1 m_2 \dots m_{n-k}$$

8. Liczbą Bella B_n nazywamy liczbę podziałów zbioru n -elementowego na podzbiory. Oczywiście

$$B_n = \sum_k \left\{ \binom{n}{k} \right\}.$$

Udowodnij, że

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

9. Wykaż, że jeśli B_n jest n -tą liczbą Bella, to

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} = e^{e^x - 1}$$

10. (Dobiński) Pokaż, że

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^n}{m!}.$$

11. Niech d_n będzie liczbą nieporządków n -elementowych (permutacji w których żaden i nie jest na swoim miejscu). Pokaż zależność rekurencyjną:

$$n! = \sum_k \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

Wynioskuj z niej wykładniczą funkcję tworzącą $\hat{D}(x)$ ciągu d_n i jego jawną postać.