

## Zadania z kombinatoryki, lista nr 2

1. Napisz funkcje tworzące dla ciągów

- (a)  $a_n$  – liczba podziałów  $n$  na składniki nie większe niż  $k$ .  
 (b)  $b_n$  – liczba podziałów  $n$  na co najwyżej  $k$  składników.  
 (c)  $c_n$  – liczba podziałów  $n$  na dokładnie  $k$  składników.

2. Pokaż, że

- (a) jeśli  $q(n, k)$  jest liczbą podziałów  $n$  na  $k$  różnych składników, to

$$\sum_{n,k} q(n, k) x^n y^k = \prod_i (1 + x^i y)$$

- (b) jeśli  $p(n, k)$  jest liczbą podziałów  $n$  na  $k$  składników, to

$$\sum_{n,k} p(n, k) x^n y^k = \prod_i \frac{1}{1 - x^i y}$$

- (c) jeśli  $\sigma(n, k)$  jest liczbą przedstawień  $n$  w postaci sumy  $k$  dodatnich składników (przedstawienia różniące się kolejnością uważamy za różne), to

$$\sum_n \sigma(n, k) x^n = \left( \frac{x}{1-x} \right)^k$$

3. Pokaż, że

- (a)  $p(2n, n) = p(n)$ ,  
 (b)  $p(n, k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k)$ .  
 (c)  $p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n-k, i)$

4. Pokaż wzory

$$(a) \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1, \quad (b) \left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}.$$

5. Pokaż wzory

$$(a) \left[ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = (n-1)!, \quad (b) \left[ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right] = (n-1)! H_{n-1}, \quad (c) \left[ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right] = \binom{n}{2}.$$

6. Wykorzystując wzory z wykładu pokaż równości:

$$(a) x^n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}}$$

$$(b) x^n = \sum_k \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] (-1)^{n-k} x^k$$

$$(c) x^n = \sum_{k,m} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left[ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right] (-1)^{n-k} x^m$$

$$(d) \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left[ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right] (-1)^{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } m = n \\ 0 & \text{gdy } m \neq n \end{cases}$$

7. Pokaż wzory

$$(a) \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\}$$

$$(b) \left[ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right] = \sum_k \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \binom{k}{m}$$

$$(c) \binom{i+j}{i} \left[ \begin{matrix} n \\ i+j \end{matrix} \right] = \sum_k \binom{n}{k} \binom{k}{i} \left[ \begin{matrix} n-k \\ j \end{matrix} \right]$$

$$(d) \binom{i+j}{i} \left\{ \begin{matrix} n \\ i+j \end{matrix} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n-k \\ j \end{matrix} \right\}$$