31 stycznia 2017

Zadania z kombinatoryki, lista nr 12

1. W tablicy $n \times n$ każda z liczb $1, 2, 3, \ldots, n$ występuje dokładnie n razy. Pokaż, że w jakimś wierszu lub kolumnie występuje co najmniej $\sqrt{n}$ różnych liczb.

2. Niech A będzie jakimś zbiorem n reszt modulo n^2. Pokaż, że istnieje zbiór B złożony również z n reszt modulo n^2, taki że przynajmniej połowa wszystkich reszt modulo n^2 może być zapisana w postaci $a + b$, gdzie $a \in A$, $b \in B$.

3. Niech $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_k^2}$ będzie długością wektora $\vec{v}$. W przestrzeni zadanych jest n wektorów jednostkowych $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Wykaż, że któryś z wektorów $\epsilon_1\vec{v}_1 + \cdots + \epsilon_n\vec{v}_n$ dla $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ ma długość mniejszą niż $\sqrt{n}$.

4. Niech $n \geq 4$, a H będzie rodziną zbiorów n-elementowych zawierającą co najwyżej $4^{n-1}/3^n$ zbiorów. Pokaż, że istnieje takie kolorowanie elementów tych zbiorów czterema kolorami, że w każdym zbiorze z H występują wszystkie cztery kolory.

5. Niech dane będą liczby k i n. Znajdź oszacowanie górne na najmniejszą liczbę $m = m(k, n)$ taką, że istnieje pokolorowanie zbioru $\{1, 2, ..., n\}$ m kolorami nie zawierające jednobarwnych ciągów geometrycznych o k wyrazach.

6. Podaj dolne oszacowania liczb Ramsey'a i Van der Waerdena: $R(k; r)$ i $W(k; r)$ dla kolorowania r kolorami używając naiwnej metody probabilistycznej.

7. Pokaż, że istnieje stała $c > 0$ o następującej własności. Niech A będzie macierzą kwadratowa $n \times n$, której wyrazami są różne liczby rzeczywiste. Wtedy możemy spermutować kolumny i wiersze macierzy A tak by w żadnym wierszu ani w żadnej kolumnie nie wystąpił rosnący ciąg (niekoniecznie kolejnych) wyrazów dlugości $c\sqrt{n}$.

8. Stosując Lemat Lokalny znajdź oszacowanie na $W(k; r)$ – minimalne n, że dowolne kolorowanie zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ używające r kolorów zawiera postęp arytmetyczny długości k.

9. Dana jest rodzina $\mathcal{F}$ zbiorów k-elementowych, w której każdy zbiór $S \in \mathcal{F}$ kroi się niepusto z co najwyżej d innymi zbiorami z $\mathcal{F}$. Dowiedź, że jeśli
$$d + 1 < \frac{2^{k-1}}{e},$$
to wtedy $\mathcal{F}$ może być pokolorowane 2-ma kolorami tak, aby żaden zbiór z $\mathcal{F}$ nie był jednobarwny.

10. Niech $S(r)$ będzie najmniejszą liczbą naturalną n taką, że dla każdego pokolorowania zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ r kolorami istnieje monochromatyczna trójka Schura, to znaczy istnieją liczby x i y takie, że x, y i $x + y$ są pokolorowane tym samym kolorem. Stosując „naiwny” wariant metody probabilistycznej, a następnie Lokalny Lemat Lovásza, podaj dwa dolne oszacowania liczby $S(r)$.