

## Zadania z kombinatoryki, lista nr 10

1. Ciągła wersja zasady szufladkowej może być sformułowana następująco. Dana jest pewna liczba obszarów zawartych w figurze o polu  $S$ . Suma pól powierzchni tych obszarów przekracza  $kS$ . Wtedy istnieje  $k + 1$  obszarów mających punkt wspólny.

- (a) W kwadracie o boku 1 dane są 64 punkty. Pokaż, że trzy z nich leżą w pewnym kole o promieniu  $1/8$ .
- (b) W kole o promieniu 16 zawartych jest 650 punktów. Pokaż, że jakieś 10 z nich można pokryć pierścieniem o promieniu zewnętrznym 3 i wewnętrznym 2 (pierścień otrzymujemy jako różnicę kół współśrodkowych).
- (c) W kwadracie o boku 1 zawarta jest figura w której odległość między żadnymi dwoma punktami nie wynosi  $1/1000$ . Pokaż, że powierzchnia jej jest mniejsza, niż 0.34. A może umiesz wykazać, że jest ona mniejsza od 0.29?

2. Na płaszczyźnie znajduje się  $N$  punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdy z  $\binom{N}{2}$  odcinków między nimi pomalowany jest jednym z  $k$  kolorów. Pokaż, że jeśli  $N > [ek!]$ , to istnieje trójkąt złożony z trzech odcinków tego samego koloru.

Wsk.: Zastosuj indukcję po  $k$ .

3. Udowodnij, że jeśli  $n \geq R(m, m, m, m)$ , to dowolna macierz zero-jedynkowa wymiaru  $n \times n$  zawiera podmacierz główną (otrzymaną przez wybranie wierszy i kolumn o tych samych numerach)  $m \times m$  w jednej z następujących postaci.

$$\begin{bmatrix} * & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & & & 1 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 1 & & & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & & & 1 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 1 & & & * \end{bmatrix}.$$

Czyli diagonalną, trójkątną lub negację którejs z nich.

4. Powtórz rozumowanie z wykładu dla grafu  $K_n$  pomalowanego  $r$  kolorami i pokaż że

$$R(k; r) \leq r^{(k-2)r+2}.$$

Powtórz to rozumowanie dla nieskończonego (przeliczalnego) grafu pełnego  $K_\infty$  i pokaż, że zawiera on jednobarwny  $K_\infty$ .

5. (Nieskończona wersja Twierdzenia Ramseya) Pokaż, że jeśli wszystkie podzbiory  $r$ -elementowe zbioru nieskończonego  $\Omega$  pomalujemy  $k$  kolorami, to istnieje taki nieskończony  $T$  zawarty w  $\Omega$ , że wszystkie  $r$ -elementowe podzbiory  $T$  mają ten sam kolor.

Wsk.: Możliwy schemat dowodu: indukcja po  $r$ . Konstruujemy nieskończone ciągi punktów  $x_0, x_1, x_2, \dots$  i zbiorów  $S_0, S_1, S_2, \dots$ . Z  $S_i$  wybieramy dowolny  $x_i$ , kolorujemy każdy  $(r-1)$ -elementowy podzbiór  $Z$  zbioru  $S_i \setminus \{x_i\}$  kolorem  $Z \cup \{x_i\}$ . Z  $S_i \setminus \{x_i\}$  wybieramy jednobarwny ze względu na to ostatnie kolorowanie podzbiór  $S_{i+1}$  i  $x_i$  przyporządkowujemy ten kolor. Następnie pokazujemy, że za  $T$  można wziąć nieskończony jednobarwny podciąg ciągu  $x_0, x_1, x_2, \dots$ .

6. Niech  $R(k, l)$  będzie minimalnym  $n$ , że  $K_n$  pomalowany 2-ma kolorami zawiera  $K_k$  pierwszego koloru, lub  $K_l$  drugiego. Uzasadnij zależności:

$$R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1), \quad R(k, 2) = R(2, k) = k.$$

Pokaż też, że gdy  $R(k-1, l)$  i  $R(k, l-1)$  są parzyste, to

$$R(k, l) < R(k-1, l) + R(k, l-1)$$

Korzystając z tych nierówności oszacuj  $R(4, 4)$ .

7. Na płaszczyźnie znajduje się  $n$  punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe.

- (a) Pokaż, że wśród dowolnych pięciu punktów jakieś cztery są wierzchołkami czworokąta wypukłego.
- (b) Pokaż, że jeśli każde cztery spośród pewnych  $m$  punktów są wierzchołkami czworokąta wypukłego, to te  $m$  punktów jest wierzchołkami  $m$ -kąta wypukłego.
- (c) Pokaż, że jeśli  $n \geq R_4(5, m)$ , to wśród naszych  $n$  punktów istnieje  $m$ , które są wierzchołkami  $m$ -kąta wypukłego.

8. (Twierdzenie Shura) Pokaż, że dla każdego  $r$  istnieje takie  $n$ , że jeśli pokolorujemy liczby  $\{1, 2, \dots, n\}$  na  $r$  kolorów, to istnieją takie  $x, y$ , że  $x, y, x+y$  są tego samego koloru.

Wsk.: Zastosuj twierdzenie Ramsey'ego do grafu którego wierzchołkami są  $\{1, 2, \dots, n\}$ , i krawędź  $\{a, b\}$  ma kolor el.  $|a-b|$ .