

### Zadania z kombinatoryki, lista nr 1

1. W sklepie dolarowym każdy z  $k$  oferowanych artykułów kosztuje dolara. Na ile sposobów może zrobić zakupy klient dysponujący  $m$  dolarami (nie musi wydać wszystkiego)?
2. Z grupy  $n$  mężczyzn i  $n$  kobiet wybieramy podzbiór liczący tyle samo kobiet i mężczyzn. Następnie w podzbiore wybieramy przywódcę mężczyzn spośród mężczyzn i przywódcę kobiet spośród kobiet. Rozważając liczbę sposobów na jakie można to uczynić pokaż, że

$$1^2 \binom{n}{1}^2 + 2^2 \binom{n}{2}^2 + \dots + n^2 \binom{n}{n}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n-1}$$

3. Rozważając kolorowania  $k$  spośród  $n$  kulek dwoma kolorami pokaż, że

$$\binom{n}{0} \binom{n}{k} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{k-1} + \dots + \binom{n}{k} \binom{n-k}{0} = 2^k \binom{n}{k}$$

4. W koło wpisano  $n$ -kąć tak, że żadne trzy jego przekątne nie przecinają się w jednym punkcie wewnątrz koła. Pokaż, że przekątne i boki  $n$ -kąta dzielą koło na

$$\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$$

obszarów.

5. Niech  $\binom{x}{k} = x^k/k!$ . Udowodnij wzory

$$(a) \sum_{k:k \leq m} \binom{x}{k} \binom{x-k}{m-k} = \frac{m+1}{2} \binom{x}{m+1}$$

$$(b) \sum_k (-1)^k \binom{a+b}{a+k} \binom{b+a}{b+k} = \frac{(a+b)!}{a!b!}$$

$$(c) \sum_k (-1)^k \binom{a+b}{a+k} \binom{b+c}{b+k} \binom{c+a}{c+k} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$$

$$(d) \sum_k \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

6. Wylicz wartość sum

$$(a) \sum_k \binom{n}{k} k$$

$$(b) \sum_k \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

7. Udowodnij następujące tożsamości:

$$(a) \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

$$(b) \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$(c) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{x}{n-k} \binom{y+k}{k} = \binom{x-y-1}{n}$$

$$(d) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{x}{k} = \binom{n-x}{n} = (-1)^n \binom{x-1}{n} = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

$$(e) \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k} \binom{x}{k}}{\binom{y}{k}} = \frac{\binom{y-x}{n}}{\binom{y}{n}}$$

$$(f) \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{\binom{x+k}{k}} = \frac{x}{x+n}$$