

Programowanie (M) 2013

Lista zadań nr 1

Na ćwiczenia 27 i 28 lutego 2013

Zadanie 1 (1 pkt). Rozważmy dwie gramatyki bezkontekstowe nad alfabetem $\Sigma = \{ (,) \}$, generujące ciągi poprawnie rozstawionych nawiasów:

$$\frac{}{\epsilon L} l_1 \quad \frac{s_1 L \quad s_2 L}{(s_1) s_2 L} l_2$$
$$\frac{}{\epsilon M} m_1 \quad \frac{s_1 M \quad s_2 M}{s_1 s_2 M} m_2 \quad \frac{s M}{(s) M} m_3$$

Udowodnij, że $s L$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s M$. Uzasadnij, że rozważane gramatyki rzeczywiście generują zbiór wszystkich ciągów poprawnie rozstawionych nawiasów. Która z gramatyk jest "lepszą" i dlaczego?

Zadanie 2 (1 pkt). Niech dany będzie graf skierowany $G = (V, E)$, przy czym będziemy pisać $edge(x, y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x, y) \in E$. Definiujemy indukcyjnie relację istnienia ścieżki pomiędzy dwoma wierzchołkami w grafie G :

$$\frac{edge(x, y)}{path(x, y)}$$
$$\frac{edge(x, y) \quad path(y, z)}{path(x, z)}$$

Udowodnij, że

1. jeżeli $edge(x, y)$ i $edge(y, z)$, to $path(x, z)$.
2. jeżeli $path(x, y)$ i $path(y, z)$, to $path(x, z)$.

Zadanie 3 (1 pkt). Niech R będzie zbiorem reguł wnioskowania. (W tym zadaniu aksjomaty i reguły wrzucamy do jednego worka.) Regułę

$$\frac{J_1 \dots J_n}{J}$$

gdzie $J_1 \dots J_n$ ($n \geq 0$) są przesłankami, a J konkluzją, nazywamy wyprowadzalną z R , jeżeli dla dowolnych instancji $J_1 \dots J_n$ i J istnieje wyprowadzenie J z $J_1 \dots J_n$ przy użyciu reguł z R . Na przykład, przy definicji liczb naturalnych:

$$\frac{}{0 \text{ Nat}} \text{zero} \quad \frac{n \text{ Nat}}{S n \text{ Nat}} \text{succ}$$

regułą wyprowadzalną jest

$$\frac{n \text{ Nat}}{S S n \text{ Nat}}$$

Regułę nazywamy dopuszczalną, jeżeli zawsze gdy jej przesłanki $J_1 \dots J_n$ są wyprowadzalne przy użyciu reguł R to konkluzja J również jest wyprowadzalna. Na przykład, regułą dopuszczalną jest:

$$\frac{S n \text{ Nat}}{n \text{ Nat}}$$

Udowodnij, że

1. jeżeli r jest regułą wyprowadzalną z R i J ma wyprowadzenie przy użyciu reguł $R \cup \{r\}$, to ma też wyprowadzenie przy użyciu reguł R .
2. jeżeli r jest regułą dopuszczalną z R i J ma wyprowadzenie przy użyciu reguł $R \cup \{r\}$, to ma też wyprowadzenie przy użyciu reguł R .

Zadanie 4 (1 pkt). Definiujemy indukcyjnie zbiór List wszystkich skończonych list (ciągów) liczb naturalnych postaci $n_1 :: n_2 :: \dots :: n_k :: \epsilon$:

$$\frac{}{\epsilon \text{ List}} \quad \frac{n \text{ Nat} \quad l \text{ List}}{n :: l \text{ List}}$$

a następnie funkcje $append : \text{List} \times \text{List} \rightarrow \text{List}$ i $reverse : \text{List} \rightarrow \text{List}$ przez indukcję po strukturze listy:

$$\begin{aligned} append(\epsilon, l_2) &= l_2 \\ append(n :: l_1, l_2) &= n :: (append(l_1, l_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} reverse(\epsilon) &= \epsilon \\ reverse(n :: l) &= append(reverse(l), n :: \epsilon) \end{aligned}$$

Uzasadnij, że obie funkcje są poprawnie zdefiniowane, a następnie udowodnij, że

$$\forall l \in \text{List}. reverse(reverse(l)) = l.$$

Zadanie 5 (1 pkt). W tym zadaniu rozważamy system dedukcji naturalnej w postaci sekwentowej (równoważnej tej omawianej na *Logice dla informatyków*) dla fragmentu logiki zdań, zawierającego zmienne zdaniowe ($p, q, r, \dots$) oraz implikację ($\rightarrow$). Niech Γ oznacza dowolny skończony zbiór formuł w naszej logice, a A i B – formuły. Definiujemy indukcyjnie relację “ A jest dowodliwa z założeń Γ ”, co zapisujemy $\Gamma \vdash A$, następująco:

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} Ax \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow I \quad \frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow E$$

gdzie skrót notacyjny Γ, A oznacza $\Gamma \cup \{A\}$.

1. Dla dowolnych formuł A, B i C , zbuduj drzewo dowodu (wyprowadzenia) następujących sekwentów (skrót notacyjny $\vdash A$ oznacza $\emptyset \vdash A$):
 - (a) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C$
 - (b) $\vdash (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$
2. Udowodnij, że jeżeli $\Gamma \vdash C$, to $\Gamma, A \vdash C$, dla dowolnej formuły A .
3. Udowodnij, że jeżeli $\Gamma, A \vdash B$ oraz $\Gamma \vdash A$, to $\Gamma \vdash B$.
4. Udowodnij, że jeżeli $\Gamma \vdash A$, to A jest logiczną konsekwencją Γ .

Zadanie 6. Rozważmy jednoznaczную gramatykę definiującą konkretną składnię języka formuł logiki zdań, która narzuca określone priorytety spójników logicznych oraz zasady ich łączności, dopuszczając użycie nawiasów:

$$\begin{aligned} \text{formuły } F &::= G \mid G \Rightarrow F \\ G &::= H \mid G \vee H \\ H &::= I \mid H \wedge I \\ I &::= J \mid \neg I \\ J &::= p \mid \top \mid \perp \mid (F) \end{aligned}$$

Rozważmy następnie (niejednoznaczную) gramatykę opisującą składnię abstrakcyjną naszego języka:

$$A ::= \text{var}(p) \mid \text{con}(A, A) \mid \text{top} \mid \text{dis}(A, A) \mid \text{bot} \mid \text{imp}(A, A) \mid \text{neg}(A)$$

Określamy teraz relację między składnią konkretną i abstrakcyjną dla języka formuł, definiując wzajemnie indukcyjnie kilka potrzebnych do tego sądów:

$$\begin{array}{c}
\frac{s \ G \leftrightarrow t \ A}{s \ F \leftrightarrow t \ A} \\
\frac{s \ H \leftrightarrow t \ A}{s \ G \leftrightarrow t \ A} \\
\frac{s \ I \leftrightarrow t \ A}{s \ H \leftrightarrow t \ A} \\
\frac{s \ J \leftrightarrow t \ A}{s \ I \leftrightarrow t \ A} \\
\hline
p \ J \leftrightarrow \text{var}(p) \ A \\
\hline
\perp \ J \leftrightarrow \text{bot} \ A
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\frac{s_1 \ G \leftrightarrow t_1 \ A \quad s_2 \ F \leftrightarrow t_2 \ A}{s_1 \Rightarrow s_2 \ F \leftrightarrow \text{imp}(t_1, t_2) \ A} \\
\frac{s_1 \ G \leftrightarrow t_1 \ A \quad s_2 \ H \leftrightarrow t_2 \ A}{s_1 \vee s_2 \ G \leftrightarrow \text{dis}(t_1, t_2) \ A} \\
\frac{s_1 \ H \leftrightarrow t_1 \ A \quad s_2 \ I \leftrightarrow t_2 \ A}{s_1 \wedge s_2 \ H \leftrightarrow \text{con}(t_1, t_2) \ A} \\
\frac{s \ I \leftrightarrow t \ A}{\neg s \ I \leftrightarrow \text{neg}(t) \ A} \\
\hline
\top \ J \leftrightarrow \text{top} \ A \\
\frac{s \ F \leftrightarrow t \ A}{(s) \ J \leftrightarrow t \ A}
\end{array}$$

Naszą intencją jest by powyższa definicja indukcyjna opisywała (niedeterministyczny) proces parsowania ciągu symboli leksykalnych s (możemy też myśleć o s jako o napisie) reprezentujących formułę logiczną do drzewa rozbioru t tej formuły.

1. Zapisz podane wyżej gramatyki w postaci odpowiednich definicji indukcyjnych, definiujących sądy $t \ A$, $s \ F$, $s \ G$, etc.
2. Pokaż, że jeżeli $s \ F \leftrightarrow t \ A$, to $s \ F$ oraz $t \ A$.
3. Budując odpowiednie drzewo wyprowadzenia sądu $s \ F \leftrightarrow t \ A$, przeprowadź parsowanie napisu $s = p_1 \wedge \neg(p_2 \vee p_3)$ do drzewa rozbioru t formuły, którą s reprezentuje.
4. Pokaż, że jeżeli $s \ F$, to istnieje takie t , że $s \ F \leftrightarrow t \ A$.