

Programowanie (M)

Lista zadań nr 2

Na ćwiczenia 6 i 8 marca 2012

Zadanie 1 (1 pkt). Zdefiniuj indukcyjnie funkcję FV , która dla danego wyrażenia (zarówno arytmetycznego jak i logicznego) wyznacza zbiór wszystkich zmiennych występujących w tym wyrażeniu. Pokaż następnie, że wartość wyrażenia zależy wyłącznie od wartości zmiennych w nim występujących, tzn. pokaż, że jeżeli $s(x) = s'(x)$ dla wszystkich $x \in FV(a)$ (dla wszystkich $x \in FV(b)$), to $\mathcal{A}[[a]]s = \mathcal{A}[[a]]s'$ ($\mathcal{B}[[b]]s = \mathcal{B}[[b]]s'$).

Czy masz pomysł na podobne twierdzenie dla instrukcji?

Zadanie 2 (1 pkt). Dany jest następujący program P w języku **While**:

$$y := 1; \text{while } \neg(x = 0) \text{ do } (y := y * z; x := x - 1)$$

Pokaż, że jeżeli $\langle P, s \rangle \rightarrow s'$, to $s'(y) = s(z)^{s(x)}$.

Zadanie 3 (1 pkt). Rozważmy program E napisany w języku **While**:

$$\text{while } \neg(m = n) \text{ do if } m \leq n \text{ then } n := n - m \text{ else } m := m - n$$

Udowodnij, że $\forall s. s(m) \geq 1 \wedge s(n) \geq 1 \Rightarrow \exists s'. \langle E, s \rangle \rightarrow s'$.

Zadanie 4 (1 pkt). Niech $W \equiv \text{while } b \text{ do } S$. Udowodnij, że

$$\langle W, s \rangle \rightarrow s'$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathcal{B}[[b]]s = \text{ff} \wedge s = s'$$

lub

$$\exists s_0, \dots, s_n. s = s_0 \wedge s' = s_n \wedge \mathcal{B}[[b]]s_n = \text{ff} \wedge \forall 0 \leq i < n. \mathcal{B}[[b]]s_i = \text{tt} \wedge \langle S, s_i \rangle \rightarrow s_{i+1}.$$

Zadanie 5 (1 pkt). Na wykładzie zdefiniowaliśmy semantykę wyrażeń arytmetycznych oraz logicznych denotacyjnie, definiując funkcje $\mathcal{A} : \mathbf{Aexp} \rightarrow \mathbf{State} \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz $\mathcal{B} : \mathbf{Bexp} \rightarrow \mathbf{State} \rightarrow \mathbb{T}$ indukcyjnie względem struktury wyrażenia. Jednakże, nic nie stoi na przeszkodzie by semantykę wyrażeń zdefiniować operacyjnie. Zaproponuj reguły definiujące semantykę naturalną wyrażeń arytmetycznych oraz logicznych, tzn. zdefiniuj indukcyjnie relacje $\langle a, s \rangle \rightarrow z$ oraz $\langle b, s \rangle \rightarrow t$ w taki sposób, by

- $\langle a, s \rangle \rightarrow z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A}[[a]]s = z$
- $\langle b, s \rangle \rightarrow t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{B}[[b]]s = t$

i udowodnij, że tak jest w istocie.

Zmodyfikuj semantykę naturalną instrukcji by korzystała z semantyki operacyjnej wyrażeń i udowodnij, że ta modyfikacja nie zmienia semantyki instrukcji w stosunku do tej oryginalnej, korzystającej z denotacyjnej semantyki wyrażeń, tzn., że sąd $\langle S, s \rangle \rightarrow s'$ jest wyprowadzalny w jednym systemie wtedy i tylko wtedy, gdy jest wyprowadzalny w drugim.

Zadanie 6 (1 pkt). Rozszerzamy składnię abstrakcyjną wyrażeń arytmetycznych języka While o wyrażenie postaci

$$S \text{ result is } a$$

Obliczenie wartości takiego wyrażenia polega na wykonaniu instrukcji S , a następnie na obliczeniu wartości wyrażenia a w być może zmienionym przez wykonanie instrukcji S stanie.

Zadaj semantykę naturalną wyrażeń arytmetycznych, logicznych i instrukcji tak zmodyfikowanego języka While. Zdefiniuj odpowiednie funkcje semantyczne na bazie zadanej semantyki naturalnej.