Programowanie (M)

Lista zadań nr 1

Na ćwiczenia 14 i 16 lutego 2012

Zadanie 1 (1 pkt). Niech (A, R) będzie definicją indukcyjną nad zbiorem T, gdzie A jest zbiorem aksjomatów, a R – zbiorem reguł. Pokaż, że zbiór wszystkich $t \in T$, dla których istnieje skończone drzewo wyprowadzenia z (A, R) jest najmniejszym zbiorem spełniającym aksjomaty A i zamkniętym ze względu na reguły R.

Zadanie 2 (1 pkt). Rozważmy dwie gramatyki bezkontekstowe nad alfabetem $\Sigma = \{(,)\}$, generujące ciągi poprawnie rozstawionych nawiasów:

$$\frac{}{\epsilon\ L}l_1 \qquad \frac{s_1\ L \quad s_2\ L}{(s_1)s_2\ L}l_2$$

$$\frac{}{\epsilon\ M}m_1 \quad \frac{s_1\ M \quad s_2\ M}{s_1 s_2\ M}m_2 \quad \frac{s\ M}{(s)\ M}m_3$$

Udowodnij, że $s\ L$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s\ M$. Uzasadnij, że rozważane gramatyki rzeczywiście generują zbiór wszystkich ciągów poprawnie rozstawionych nawiasów. Która z gramatyk jest "lepsza" i dlaczego?

Zadanie 3 (1 pkt). Niech dany będzie graf skierowany $G = (V, E)$, przy czym będziemy pisać $edge(x, y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x, y) \in E$. Definiujemy indukcyjnie relację istnienia ścieżki pomiędzy dwoma wierzchołkami w grafie G:

$$\frac{edge(x, y)}{path(x, y)}$$

$$\frac{edge(x, y) \quad path(y, z)}{path(x, z)}$$

Udowodnij, że

1. jeżeli $edge(x, y)$ i $edge(y, z)$, to $path(x, z)$.
2. jeżeli $path(x, y)$ i $path(y, z)$, to $path(x, z)$.

Zadanie 4 (1 pkt). Niech R będzie zbiorem reguł wnioskowania. (W tym zadaniu aksjomaty i reguły wrzucamy do jednego worka.) Regułę

$$\frac{J_1 \dots J_n}{J}$$

gdzie $J_1 \dots J_n$ $(n \geq 0)$ są przesłankami, a J konkluzją, nazywamy wyprowadzalną z R, jeżeli dla dowolnych instancji $J_1 \dots J_n$ i J istnieje wyprowadzenie J z $J_1 \dots J_n$ przy użyciu reguł z R. Na przykład, przy definicji liczb naturalnych:

$$\frac{}{0\ nat}zero \quad \frac{n\ nat}{S\ n\ nat}succ$$

regułą wyprowadzalną jest

$$\frac{n\ nat}{S\,S\,n\ nat}$$

Regułę nazywamy dopuszczalną, jeżeli zawsze gdy jej przesłanki $J_1 \dots J_n$ są wyprowadzalne przy użyciu reguł R to konkluzja J również jest wyprowadzalna. Na przykład, regułą dopuszczalną jest:

$$\frac{S\,n\ nat}{n\ nat}$$

Udowodnij, że

1. jeżeli r jest regułą wyprowadzalną z R i J ma wyprowadzenie przy użyciu reguł $R \cup \{r\}$, to ma też wyprowadzenie przy użyciu reguł R.
2. jeżeli r jest regułą dopuszczalną z R i J ma wyprowadzenie przy użyciu reguł $R \cup \{r\}$, to ma też wyprowadzenie przy użyciu reguł R.

Zadanie 5 (1 pkt). Definiujemy indukcyjnie zbiór $List$ wszystkich skończonych list (ciągów) liczb naturalnych postaci $n_1 :: n_2 :: \dots :: n_k :: \epsilon$:

$$\frac{}{\epsilon\ List} \qquad \frac{n\ nat \quad l\ List}{n :: l\ List}$$

a następnie funkcje $append : List \times List \to List$ i $reverse : List \to List$ przez indukcję po strukturze listy:

$$\begin{aligned} append(\epsilon, l_2) &= l_2 \\ append(n :: l_1, l_2) &= n :: (append(l_1, l_2)) \\ \\ reverse(\epsilon) &= \epsilon \\ reverse(n :: l) &= append(reverse(l), n :: \epsilon) \end{aligned}$$

Uzasadnij, że obie funkcje są poprawnie zdefiniowane, a następnie udowodnij, że

$$\forall l \in List.reverse(reverse(l)) = l.$$

Zadanie 6 (1 pkt). W tym zadaniu rozważamy system dedukcji naturalnej w postaci sekwentowej (równoważnej tej omawianej na *Logice dla informatyków*) dla fragmentu logiki zdań, zawierającego zmienne zdaniowe ($p, q, r, \dots$) oraz implikację ($\to$). Niech Γ oznacza dowolny skończony zbiór formuł w naszej logice, a A i B – formuły. Definiujemy indukcyjnie relację "A jest dowodliwa z założeń Γ", co zapisujemy $\Gamma \vdash A$, następująco:

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}Ax \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to I \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \to E$$

gdzie skrót notacyjny Γ, A oznacza $\Gamma \cup \{A\}$.

1. Dla dowolnych formuł A, B i C, zbuduj drzewo dowodu (wyprowadzenia) następujących sekwentów (skrót notacyjny $\vdash A$ oznacza $\emptyset \vdash A$):
   (a) $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to A \to C$
   (b) $\vdash (A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$
2. Udowodnij, że jeżeli $\Gamma \vdash C$, to $\Gamma, A \vdash C$, dla dowolnej formuły A.
3. Udowodnij, że jeżeli $\Gamma, A \vdash B$ oraz $\Gamma \vdash A$, to $\Gamma \vdash B$.
4. Udowodnij, że jeżeli $\Gamma \vdash A$, to A jest logiczną konsekwencją Γ.