Wykład 14, 05.06.2001 ZAGADNIENIA BRZEGOWE, METODY RÓŻNICOWE CD.: TW. LAXA-MILGRAMA

Przypomnijmy z poprzedniego wykładu:

- **zagadnienie brzegowe**

$$Lu = f \tag{1}$$

na $[0,1]$, z warunkami brzegowymi

$$lu = g, \tag{2}$$

gdzie

$$Lu \equiv u'' + pu' - qu, \qquad lu \equiv \begin{cases} l_0 u \equiv u & \text{dla } x = 0, \\ l_1 u \equiv u & \text{dla } x = 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \mu_1 & \text{dla } x = 0, \\ \mu_2 & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$

Zagadnienie to posiada jednoznaczne rozwiązanie $u \in C^{(4)}[0,1]$ dla $p,\ q,\ f \in C^{(2)}[0,1]$, i $q(x) \geq 0$. □

- i **schemat różnicowy**

$$L_h y_h = f_h \tag{3}$$

$$l_h y_h = g_h, \tag{4}$$

dla $f_h \in Y'_h$, $g_h \in Y^*_h$, czyli układ równań liniowych

$$\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} + p(x_j)\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - q(x_j)y_j = f(x_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, N-1)$$

$$y_0 = \mu_1, \qquad y_N = \mu_2.$$

mający, ogólniej, postać układu równań liniowych o macierzy trójprzekątniowej

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N-1 \tag{5}$$

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1, \qquad y_N = \kappa_2 y_{N-1} + \mu_2 \tag{6}$$

□

I. Własności metody przegnania (zob. materiały wykładu 13)

Załóżmy, że $A_i \neq 0$, $B_i \neq 0$ dla wszystkich i; w przeciwnym razie układ można rozdzielić na oddzielne, mniejsze układy równań.

Twierdzenie Warunkiem wystarczającym, aby algorytm metody przegnania mógł być zrealizowany, jest spełnienie następujących nierówności:

$$|C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \qquad |\kappa_1| + |\kappa_2| < 2, \qquad |\kappa_1|, |\kappa_2| \leq 1\,.$$

Dowód:

- *Mianowniki wyrażeń występujących we wzorach kroku 1 nie znikają.*
  Dowód. Ponieważ $B_i \neq 0$, więc $|C_i| > |A_i|$, więc

$$|C_i - \alpha_i A_i| \geq |C_i| - |\alpha_i||A_i| > |A_i|(1 - \alpha_i) \geq 0\,.$$

- *Spełniona jest zależność*

$$|\alpha_i| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |\alpha_{i+1}| < 1\,.$$

  Dowód wynika z nierówności

$$|C_i| - |\alpha_i||A_i| \geq |B_i|.$$

- *Mianownik w wyrażeniu na y_N również nie znika.*
  Dowód. Ponieważ $|\kappa_1| + |\kappa_2| < 2$, więc

– albo $|\kappa_1| < 1$, czyli $|\alpha_1| < 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, N$

– albo $|\kappa_2| < 1$.

Zatem: $|1 - \alpha_N \kappa_2| \geq 1 - |\alpha_N||\kappa_2| > 0$.

- Na podstawie nie znikających mianowników otrzymujemy *jednoznaczność rozwiązania schematu różnicowego*, a jak łatwo policzyć, liczba operacji arytmetycznych koniecznych do wykonania jest proporcjonalna do liczby niewiadomych $(N+1)$ i może być przedstawiona wzorem

$$8(N+1) - 9\,.$$

- Nierówności $|\alpha_i| \leq 1$ zabezpieczają przed lawinowym wzrostem błędu obliczanych wartości $\{y_i\}$ w pętli kroku 2. Ogólnie można stwierdzić, że

$$\max_i |\mathrm{fl}(y_i) - y_i| \;\approx\; \epsilon N^2$$

gdzie ϵ jest równe *epsilonowi maszynowemu.*

□

II. Aproksymacja, stabilność i zbieżność

Zauważmy, że rozwiązanie u zag. brzegowego (1), (2), zrzutowane na przestrzeń Y_h funkcji siatkowych ($[u]_h \in Y_h$) **nie spełnia równań różnicowych** (3), (4). Możemy jedynie zapisać równości

$$L_h[u]_h = f_h + \psi_h \qquad \text{na} \qquad \omega'_h, \tag{7}$$

oraz

$$l_h[u]_h = g_h + \phi_h \qquad \text{na} \qquad \omega^*_h, \tag{8}$$

gdzie $f_h = [f]_h$, $g_h = [g]_h$, a $\psi_h = L_h[u]_h - f_h = L_h[u]_h - [Lu]_h$, $\phi_h = l_h[u]_h - [lu]_h$ są funkcjami siatkowymi zwanymi *residuami* $\psi_h \in Y'_h$, $\phi_h \in Y^*_h$ (odpowiednio residuum dla r. różnicowego, oraz residuum dla warunków brzegowych.)

Definicja Mówimy, że schemat różnicowy (3), (4) *aproksymuje zagadnienie różniczkowe* (1), (2) *na jego rozwiązaniu* u *z rzędem* k *ze względu na krok* h, jeśli $k > 0$ oraz

$$||\psi||'_h = \mathrm{O}(h^k) \qquad \text{i} \qquad ||\phi||^*_h = \mathrm{O}(h^k)$$

□

Widzimy, że warunki brzegowe są spełnione dokładnie, oraz że

$$||\psi_h||'_h = \mathrm{O}(h^2)$$

czyli, zagadnienie brzegowe (1), (2) jest aproksymowane schematem różnicowym (3), (4) z rzędem 2.

Definicja Schemat różnicowy (3), (4) nazywa się *schematem stabilnym*, jeśli

$$\bigvee h_0 > 0 \qquad \bigwedge h = \frac{1}{N} < h_0 \qquad \bigwedge \xi \in Y'_h,\, \eta \in Y^*_h \qquad \text{schemat} \qquad L_h z_h = \xi_h, \quad l_h z_h = \eta_h$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie $z_h \in Y_h$, spełniające nierówność

$$||z_h||_h \;\leq\; C'||\xi_h||'_h \,+\, C^*||\eta_h||^*_h$$

w której stałe C', C^* nie zależą od h, ξ_h, η_h. □

Twierdzenie *Schemat różnicowy* (3), (4) *jest schematem stabilnym.*
<u>Dowód.</u> Układ równań (5), (6) posiada jednoznaczne rozwiązanie, zagwarantowane warunkiem $0 < h < h_0$. Trzeba jeszcze udowodnić istnienie stałych C', C^*. Korzystając z liniowości układu równań możemy przyjąć

$$z_h = r_h + s_h \qquad \text{gdzie} \qquad \begin{cases} L_h r_h = \xi_h, & l_h r_h = 0\,, \\ L_h s_h = 0, & l_h s_h = \eta_h\,. \end{cases}$$

Dla uproszczenia przyjmijmy $p(x) \equiv 0$. Układ równań na r_h przyjmuje postać:

$$r_{j-1} - (2 + h^2 q(x_j))r_j + r_{j+1} = h^2 \xi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, N-1),$$

$$r_0 = 0\,, \qquad r_N = 0\,.$$

Dowodzi się, że

$$||r_h||_h = \max_{0 \le j \le N} |r_j| \le N^2 \max_{1 \le j \le N-1} |h^2 \xi_j| = ||\xi_h||'_h\,.$$

Dla funkcji s_h, spełniającej układ równań

$$s_{j-1} - (2 + h^2 q(x_j))s_j + s_{j+1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, N-1),$$

$$s_0 = \eta_0\,, \qquad s_N = \eta_N\,,$$

pokazuje się (w tym przypadku dowód jest łatwy również dla $p \not\equiv 0$), że

$$||s_h||_h = \max_{0 \le j \le N} |s_j| = \max\{|\eta_0|, |\eta_N|\} = ||\eta_h||^*_h\,.$$

Ostatecznie więc otrzymujemy: $C' = C^* = 1$. (Znacznie bardziej złożony jest dowód przy założeniu, że $p \in C_{[0,\,1]}$, otrzymujemy inne wartości stałych.)

□

Definicja Mówimy, że rozwiązanie y_h schematu różnicowego (3), (4) jest *zbieżne* do rozwiązania u zag. brzegowego (1), (2) z rzędem k ze względu na krok siatki h gdy $k > 0$ i

$$||[u]_h - y_h||_h = \mathrm{O}(h^k).$$

□

Twierdzenie (Laxa-Milgrama) Niech stabilny schemat różnicowy (3), (4) aproksymuje zag. brzegowe (1), (2) na rozwiązaniu u z rzędem k względem kroku h. Wtedy rozwiązanie y_h schematu różnicowego dąży do u z tym samym rzędem względem h.

(Popularnie: aproksymacja + stabilność = zbieżność)

Dowód.

- Aproksymacja:

$$\bigvee h_1 > 0\,, C_1 > 0 \;:\; \bigwedge h < h_1 \quad ||\psi_h||'_h \le C_1 h^k \;\wedge\; ||\xi_h||^*_h \le C_1 h^k$$

  (warunek $h < h_1$ dotyczy np. warunków rozwiązalności zagadnienia różnicowego).

- korzystając z liniowości schematu odejmujemy (3), (4) od (7), (8) otrzymując równania

$$L_h([u]_h - y_h) = \psi_h, \tag{9}$$

$$l_h([u]_h - y_h) = \phi_h. \tag{10}$$

- Na podstawie stabilności

$$\bigvee h_0 > 0 \;:\; h_0 \le h_1\,, \quad \bigvee C'\,,\, C^* \;:\; \bigwedge 0 < h < h_0$$

  zagadnienie (9), (10) posiada jednoznaczne rozwiązanie, i spełniona jest nierówność

$$||[u]_h - y_h||_h \le C'||\psi_h||'_h + C^*||\phi_h||^*_h \le C'C_1 h^k + C^* C_1 h^k = C h^k,$$

  gdzie

$$C = C'(C_1 + C^*).$$

□

Dla naszego schematu otrzymujemy nierówność

$$||[u]_h - y_h||_h \le C h^2\,,$$

czyli zbieżność kwadratową.

●