Wykład 13, 29.05.2001 ZAGADNIENIA BRZEGOWE, METODY RÓŻNICOWE

I. Kilka twierdzeń

Tw. 1. *Kincaid, Cheney, s. 533*
Zagadnienie brzegowe $x'' = f(t, x)$, $x(0) = 0$, $x(1) = 0$ posiada jednoznaczne rozwiązanie jeżeli $\frac{\partial f}{\partial x}$ jest ciągła, nieujemna i ograniczona na pasie: $0 \le t \le 1$, $-\infty < x < \infty$.

$\square$

Tw. 2. *Kincaid, Cheney, s. 536*
Niech $f = f(t, x)$ będzie ciągłą funkcją, określoną na pasie: $0 \le t \le 1$, $-\infty < x < \infty$, spełniającą warunek Lipshitza względem zmiennej x ze sta'lą $k < 8$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \le k|x_1 - x_2|$$

Wówczas zagadnienie brzegowe $x'' = f(t, x)$, $x(0) = 0$, $x(1) = 0$ posiada jednoznaczne rozwiązanie $x \in C[0, 1]$. Dowód (pozostawiony w książce jako zadanie) za pomocą twierdzenia o punkcie stałym dla odwzorowań zwężających w przestrzeni zupełnej.

$\square$

Tw. 3. *Volkov, s. 195*

$$Lu \equiv u'' + p(x)u' - q(x)u = f(x), \quad 0 \le x \le 1$$
$$l_0 u \equiv u(0) = \mu_1,$$
$$l_1 u \equiv u(1) = \mu_2.$$

Zagadnienie brzegowe posiada jednoznaczne rozwiązanie $u(x) \in C^{(4)}[0, 1]$ dla $p,\ q,\ f\ \in C^{(2)}[0, 1]$, $q(x) \ge 0$.

$\square$

Tw. 4. *Stoer, Bulirsch, s. 486* (proponuję obejrzeć, jest dowód ...)

$\square$

II. Przykład

Było omawiane równanie drgań sprężyny. Sformułujmy zagadnienie brzegowe:

$$mx'' + kx = 0,$$

$$x(0) = 0 = x(T).$$

Rozwiązaniem ogólnym r.r. jest

$$x(t) = c_1 sin(\omega t) + c_2 cos(\omega t)$$

dla $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Rozwiązanie niezerowe istnieje, jeśli $\omega T = n\pi$. Wówczas

$$x(t) = c_1 sin(\frac{n\pi t}{T})$$

i parametr c_1 pozostaje nieokreślony, czyli istnieje nieskończenie wiele rozwiązań.

III. Ilorazy różnicowe, siatka

Podstawą wszystkich metod różnicowych jest pomysł zastąpienia pochodnych występujących w równaniu różniczkowym, odpowiednimi ilorazami różnicowymi, np:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=x_i} \sim \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h}, \quad \text{albo} \quad \left(\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=x_i} \sim \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h},$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\bigg|_{x=x_i} \sim \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2}.$$

Czasem potrzebne jest aproksymowanie ilorazem różnicowym wartości pochodnej w punkcie brzegowym, np. x_0. Można zrobić to z rzędem 2 na trzech węzłach:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=x_0} \sim Au(x_0) + Bu(x_1) + Cu(x_2)$$

dobierając odpowiednio współczynniki A, B, C (zad.1).
Zamiast zaś funkcji, jako odwzorowania określonego na całym przedziale zmiennej niezależnej $[0,1]$, wykorzystujemy jedynie wartości takiej funkcji na ustalonym, dyskretnym zbiorze punktów z tego przedziału, najczęściej punktów równoodległych, zwanym siatką:

1. **Siatką węzłów równoodległych** ω_h nazywamy skończony zbiór punktów:

$$\omega_h = \{x_j\}_{j=0}^{N} \ : \ x_j = jh, \ \ h = \frac{1}{N}, \ (N > 1).$$

   Wyróżniamy dla wygody: ω'_h – węzły wewnętrzne: $1 \le j < N$, ω^*_h – węzły brzegowe: $j = 0, N$, $(\omega_h = \omega'_h \cup \omega^*_h)$.

2. Na siatce określone są **funkcje siatkowe** y_h, reprezentowane przez swój zbiór wartości w węzłach siatki: $y_j = y_h(x_j)$ dla $x_j \in \omega_h$.

3. Wartości zwykłej funkcji $f = f(x)$ w węzłach siatki będziemy oznaczać przez $f(x_j)$ lub $[f]_j$, a przez $[f]_h$ oznaczymy funkcję siatkową otrzymaną z funkcji f przez przyjęcie jej wartości w węzłach siatki.

4. Przestrzeń liniowa Y_h funkcji siatkowych określonych na ω_h jest izomorficzna z przestrzenią Euklidesową R^{N+1}. Analogicznie możemy wprowadzić przestrzenie liniowe funkcji siatkowych Y'_h i Y^*_h określonych na siatkach ω'_h i ω^*_h.

5. Wprowadźmy normę maximum w tych przestrzeniach liniowych, oznaczając je odpowiednio: $||\cdot||_h$, $||\cdot||'_h$ oraz $||\cdot||^*_h$:

$$||y_h||_h = \max_{0 \le j \le N} |y_j|.$$

IV. Aproksymacja zagadnienia brzegowego

Rozpatrzmy teraz *liniowe zagadnienie brzegowe*, dla którego mamy zagwarantowane istnienie i jednoznaczność rozwiązania (por. tw. 3):

$$Lu = f \tag{1}$$

na $[0,1]$, z warunkami brzegowymi

$$lu = g, \tag{2}$$

gdzie

$$Lu \equiv u'' + pu' - qu, \qquad lu \equiv \begin{cases} l_0 u \equiv u & \text{dla } x = 0, \\ l_1 u \equiv u & \text{dla } x = 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \mu_1 & \text{dla } x = 0, \\ \mu_2 & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$

Zagadnienie to posiada jednoznaczne rozwiązanie $u \in C^{(4)}[0,1]$ dla $p, q, f \in C^{(2)}[0,1]$, i $q(x) \ge 0$.

□

Operatory różniczkowe L i l, określone dla dostatecznie regularnych funkcji ciągłych zostaną zastąpione operatorami różnicowymi określonymi na przestrzeniach funkcji siatkowych. Niech

$$(L_h[u]_h)_j = \frac{[u]_{j-1} - 2[u]_j + [u]_{j+1}}{h^2} + p(x_j)\frac{[u]_{j+1} - [u]_{j-1}}{2h} - q(x_j)[u]_j$$

dla $j = 1, 2, \ldots, N-1$.

Tw.5 Jeśli funkcja $u \in C^{(4)}[0,1]$ jest rozwiązaniem zagadnienia brzegowego (1), (2), to

$$\bigvee C_u \in R \qquad ||[Lu]_h - L_h[u]_h||'_h \le C_u h^2.$$

Dowód wynika z nierówności:

$$|p(x_j)u'(x_j) \ - \ p(x_j)\frac{[u]_{j+1} - [u]_{j-1}}{2h}| \ \le \ \frac{h^2}{6}||p||_C||u'''||_C$$

$$|u''(x_j) \ - \ \frac{[u]_{j+1} - 2[u]_j + [u]_{j-1}}{h^2}| \ \le \ \frac{h^2}{12}||p||_C||u^{(4)}||_C$$

gdzie

$$||p||_C = \max_{[0,1]} |p(x)|.$$

□

Def. Operator różnicowy L_h aproksymuje operator różniczkowy L z rzędem k względem kroku h, w sensie normy $||.||'_h$ jeżeli $k > 0$ i dla każdej dostatecznie regularnej funkcji u spełniona jest nierówność

$$||[Lu]_h - L_h[u]_h||'_h \leq C_u h^k$$

gdzie C_u jest stałą nie zależącą od h.

□

V. Metoda przegnania

Schemat różnicowy:

$$L_h y_h = f_h \tag{3}$$

$$l_h y_h = g_h, \tag{4}$$

dla $f_h \in Y'_h$, $g_h \in Y^*_h$, czyli

$$\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} + p(x_j)\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - q(x_j)y_j = f(x_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, N-1)$$

$$y_0 = \mu_1, \qquad y_N = \mu_2$$

ma postać układu równań liniowych o macierzy trójprzekątniowej. Ten układ można zapisać w postaci ogólniejszej, uwzględniającej warunki brzegowe zawierające wartości pochodnej:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N-1$$

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1, \qquad y_N = \kappa_2 y_{N-1} + \mu_2$$

i przy dodatkowych założeniach rozwiązać sprytnie zaprogramowaną, zwykłą metodą eliminacji Gaussa, zwaną w tym przypadku *metodą przegnania* albo *sweep method* (zob. np. A. A. Samarskij, *Teorija raznostnych schiem*, Nauka, Moskva 1977). Należy wykonać następujące kroki obliczeniowe:

Krok 1: Obliczyć α_i i β_i ze wzorów rekurencyjnych:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \qquad \beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i},$$

$$i = 1, 2, \cdots, N-1, \qquad \alpha_1 = \kappa_1, \quad \beta_1 = \mu_1.$$

Krok 2: Obliczyć rozwiązanie układu ze wzorów:

$$y_N = \frac{\mu_2 + \kappa_2\beta_N}{1 - \alpha_N\kappa_2}, \qquad y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad i = N-1, N-2, \cdots, 0.$$

□

VI. Zadania

1. Dobrać wartości współczynników A, B, C w wyrażeniu aproksymującym wartość pierwszej pochodnej na lewym końcu przedziału x_0 tak, aby błąd był maksymalnego rzędu. Węzły mogą być równoodległe, ale nie muszą.

2. Analogiczne zadanie dla aproksymacji pochodnej na prawym końcu przedziału

$$\left(\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=x_N} \sim Au(x_{N-2}) + Bu(x_{N-1}) + Cu(x_N)\,.$$

3. Wyznaczyć rząd aproksymacji drugiej pochodnej ilorazem różnicowym:

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\bigg|_{x=x_i} \sim \frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h)}{h^2}.$$

4. Rozwiązać numerycznie zagadnienie brzegowe:

$$y'' = 400y - 401 \sin x \ , \qquad y(0) = 0 \ , \qquad y(a) = \sin a$$

dla kilku długości przedziału $[0, a]$, np. $a = 1, 2, 5$. Obejrzeć błędy rozwiązań numerycznych otrzymanych dla różnych wartości parametrów metod.

5. Rozwiązać numerycznie nieliniowe zagadnienie brzegowe:

$$y'' - y'^2 - y^2 + y + 1 = 0 \ , \quad y(0) = 0.5 \ , \quad y(\pi) = -0.5 \quad \text{z rozwiązaniem:} \quad y(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) \ .$$

Zastosować metodę strzałów, oraz zaproponować i wypróbować metodę iteracyjną do rozwiązywania nieliniowego zagadnienia różnicowego.

6. Aproksymować wartość pierwszej , drugiej pochodnej funkcji f w węźle x_i z maksymalną dokładnością, za pomocą wartości funkcji w węzłach x_{i-1}, x_i, x_{i+1} w przypadku gdy węzły te nie są równoodległymi.

●