

Wykład 13: ZAGADNIENIA SZTYWNE

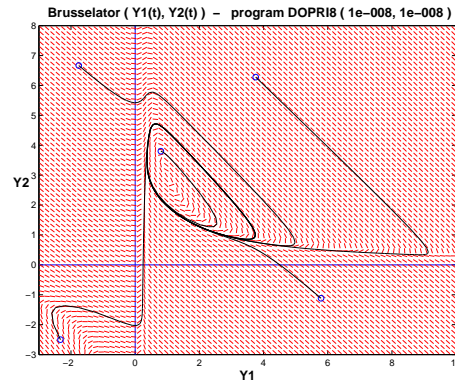
PRZYKŁADY I ZAGADNIENIA DO ROZWIĄZYWANIA – CZĘŚĆ 2

1 Brusselator – układ RR modelujący rozpraszanie w reakcji chemicznej

```
function w = bruss(t,y);

    y1 = 1 + ( y(1)*y(2)-4 ) * y(1);
    y2 = ( 3-y(1)*y(2) ) * y(1);

    w = {[y1; y2]};
    % rozw. na [0, 5]x[0, 5]
```



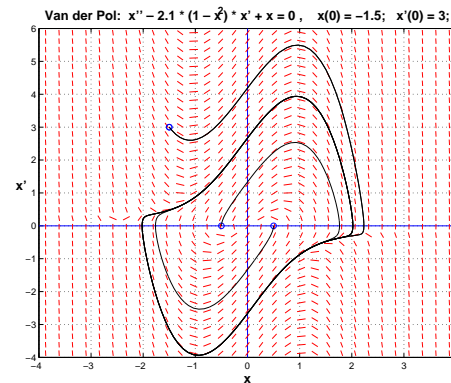
2 Van der Pol: $x'' - \mu * (1 - x^2) * x' + x = 0$

```
function Y_ = aszFunkcier3(t, Y)

% r. van der Pola

Y_(1) = Y(2);
Y_(2) = 2.1*(1-Y(1).^2)*Y(2) - Y(1);

Y_ = Y_';
```



3 Chaos

3.1 Układ RR Lorentza

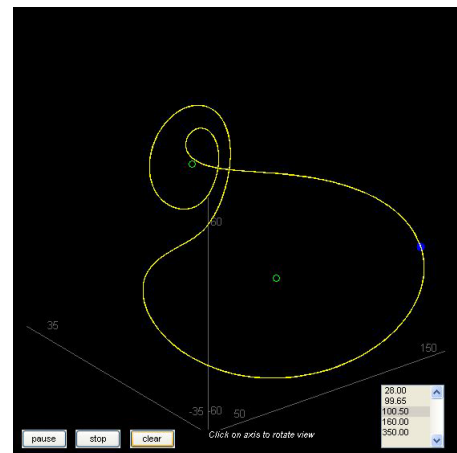
$$x' = \sigma(y - x), \quad y' = \rho x - y - xz, \quad z' = xy - \beta z, \quad \text{dla} \quad \sigma = 10, \quad \beta = 8/3, \quad \rho = 99.96$$

The following is Edward Lorenz's account of what happened on a curious day in 1961: "At one point I decided to repeat some of the computations in order to examine what was happening in greater detail. I stopped the computer, typed in a line of numbers that it had printed out a while earlier, and set it running again. I went down the hall for a cup of coffee and returned after about an hour, during which time the computer had simulated about two months of weather. The numbers being printed out were nothing like the old ones..."

For certain values of the three parameters, the solution to the system will be chaotic. In that case, there will be a set of points to which the solution will be attracted over time. This attracting set is the Lorenz Attractor. Because solutions to the Lorenz equations for these parameter values exhibit chaos, the Lorenz Attractor is complicated and is considered to be a strange attractor...

Funkcja `lorenzgui.m` znajduje się wśród matlabowskich programów prof. Cleve Molera, pod adresem <http://www.mathworks.com/moler/ncmfilelist.html>.

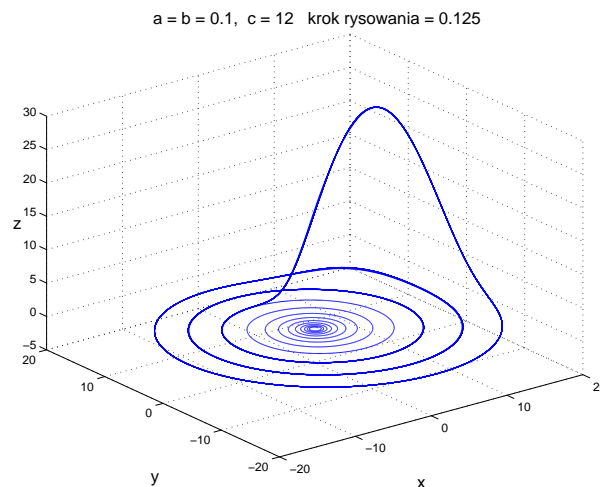
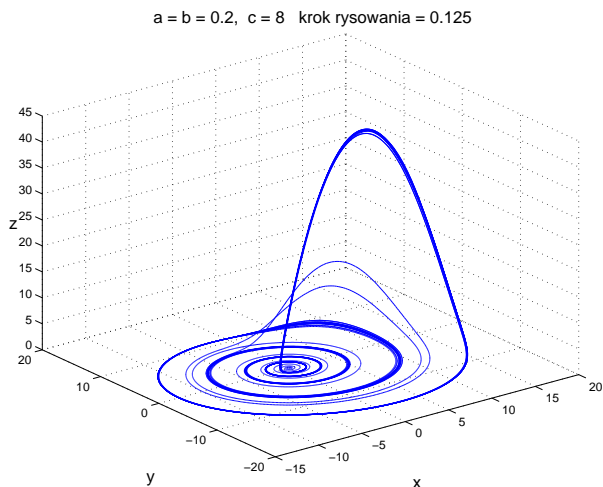
Opis poszczególnych orbit jest w książce Sparrowa¹



¹Colin Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer-Verlag, New York, 1982, rozdz. 4

3.2 Attractor Rösslera – uproszczenie układu RR Lorenza

$$x' = -(y + z), \quad y' = x + ay, \quad z' = b + (x - c)z, \quad \text{dla} \quad a = b = 0.2, \quad c = 8.0; \quad a = b = 0.1, \quad c = 12.0$$



4 Sztywność, stabilność numeryczna

DEF. (Palczewski) Układ m równań różniczkowych liniowych ze stałą macierzą A

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (\text{ozn. Palczewski})$$

nazywa się **układem sztywnym**, jeśli wartości własne λ_j , $j = 1, 2, \dots, m$ macierzy A mają ujemne części rzeczywiste

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

zaś liczba

$$s = \frac{\max_{i=1,2,\dots,m} |\lambda_i|}{\min_{i=1,2,\dots,m} |\lambda_i|}$$

zwana *współczynnikiem sztywności* jest znacznie większa od 1. □

DEF. (http://web.math.unifi.it/users/brugnano/preprint/AIP_1168_3.pdf²)

- Systems containing very fast components as well as very slow components (Dahlquist).
- Stiff equations are equations where certain implicit methods ... perform better, usually tremendous better, than explicit ones (Curtiss).
- Stiff equations are problems for which explicit methods don't work (Hairer). □

Można znaleźć następujące zdania:

- "they have been termed stiff since they correspond to tight coupling between the driver and the driven components in servo-mechanism".
- Sometimes one has the feeling that stiffness is becoming so broad to be nearly synonymous of difficult.

DEF. A numerical method is stable if error incurred at one stage of the process do not tend to magnify at later stages. □

5 Obszary stabilności absolutnej metod RK

Rozdany został materiał skserowany z Krupowicza...

DEF. Schemat różnicowy nazywa się *schematem A-stabilnym*, jeśli jego obszar stabilności absolutnej zawiera półpłaszczyznę $\operatorname{Re}(z) < 0$. □

²Luigi Brugnano, Francesca Mazzia and Donato Trigiante, *The role of the precise definition of stiffness in designing codes for the solution of ODEs*, AIP Conf. Proc. 1168 (2009) 731-734.

6 Przykład równania sztywnego

(http://laser.cheng.cam.ac.uk/wiki/images/e/e5/NumMeth_Handout_7.pdf)

Zadanie

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -5000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -5000, \lambda_2 = -1.002. \quad (1)$$

Rozwiązywane jest ono dwiema funkcjami matlabowskimi: **ode45** oraz **ode15s**

wywołanie:

```
options=odeset('RelTol',1e-6,...
    'Stats','on');
Xo = [1;1];
tspan = [0,5];
    %call the solver
tic
[t,X]=ode45(@TestF,tspan,Xo,options);
% [t,X]=ode15s(@TestF,tspan,Xo,options);
toc
```

```
function [dx_dt]= TestF(t,x)
M = [-1,-1;...
    1,-5000];
dx_dt = M*x;
return
```

- Koszty obliczeń:

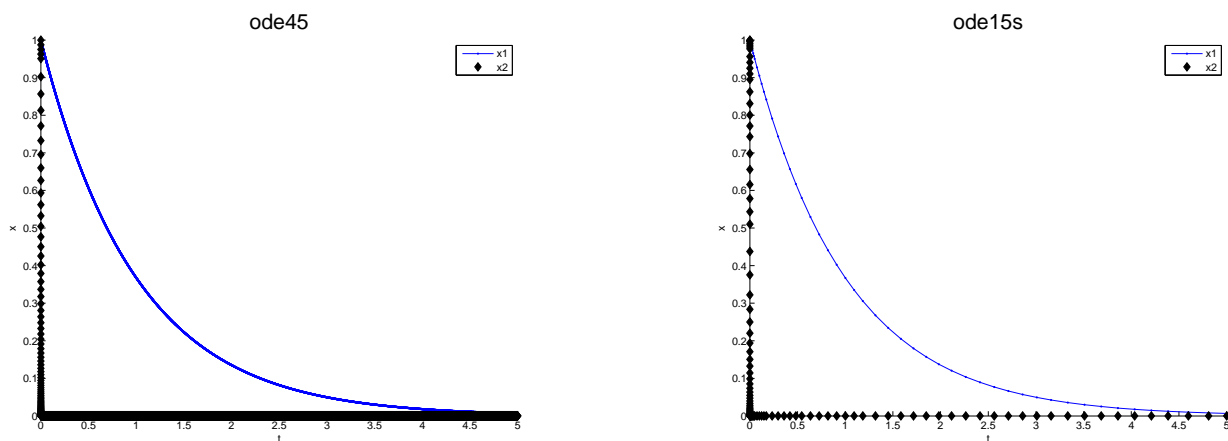
dla **ode45**:

7557 successful steps
504 failed attempts
48367 function evaluations
Elapsed time is 7.484634 seconds.

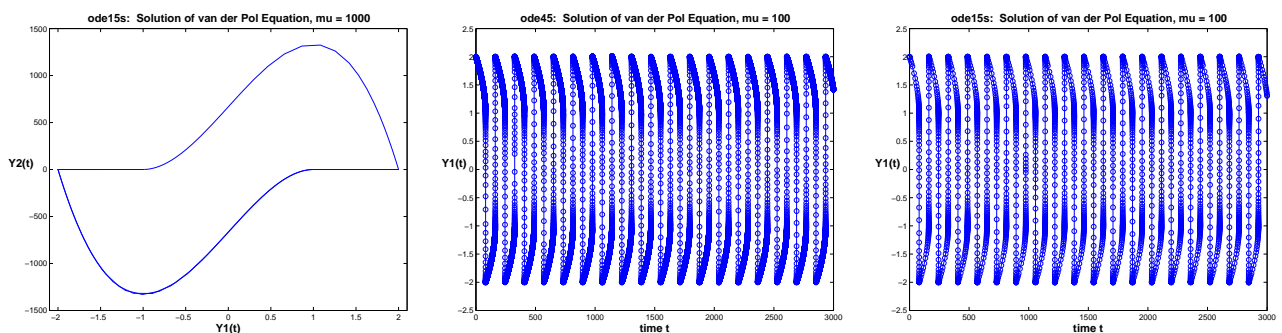
dla **ode15s**:

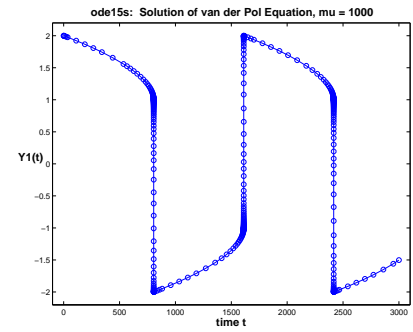
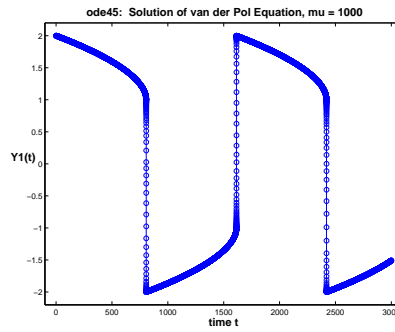
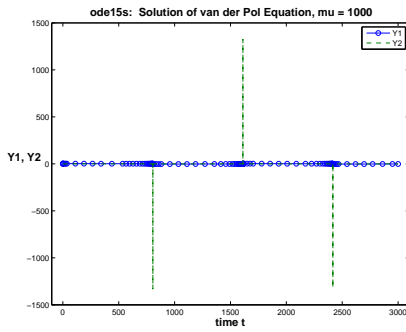
139 successful steps
3 failed attempts
286 function evaluations
0 partial derivatives
27 LU decompositions
284 solutions of linear systems
Elapsed time is 0.301320 seconds.

- ilustracje wyników:



7 Równanie Van der Pola dla obwodów elektrycznych $(\vec{Y}(0) = [2; 0])$



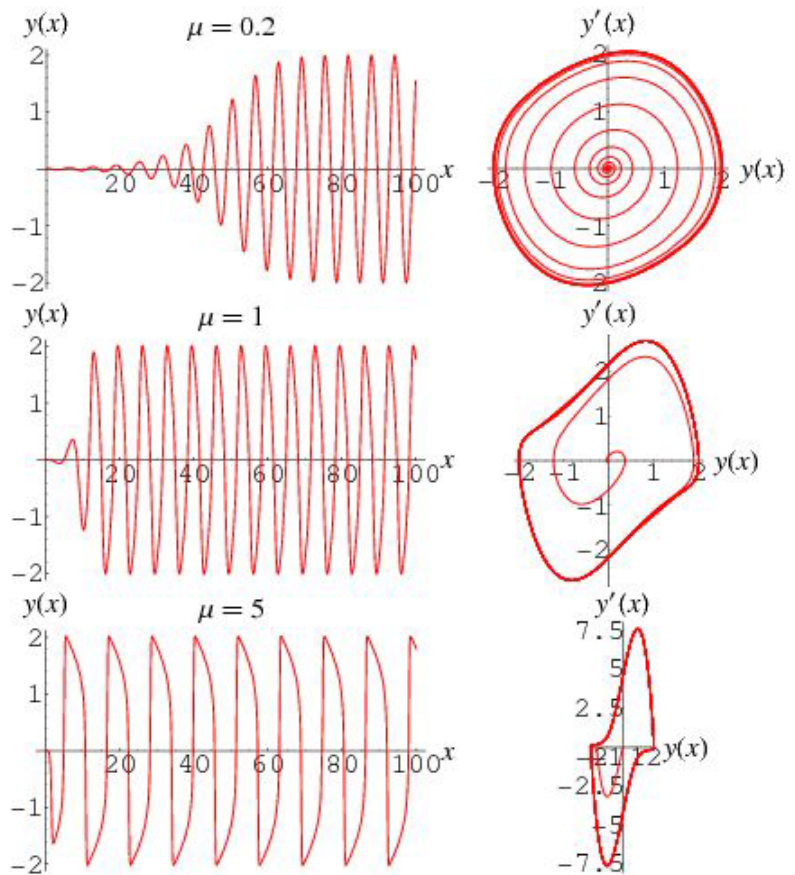
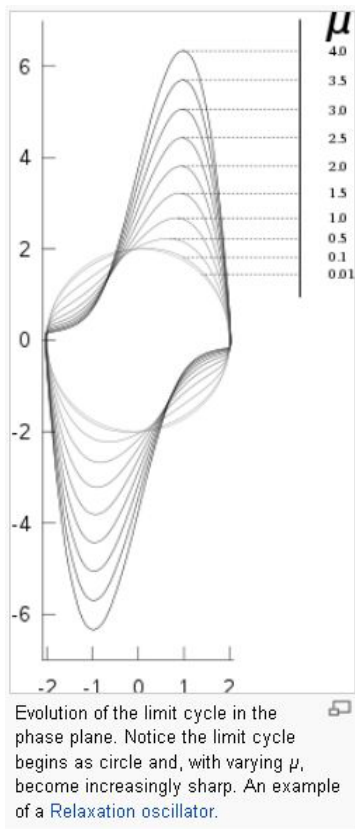


Wyniki obliczeń dla $Tol = 1e - 3$

```
function...
    yp = vdp1(t,y)
global mu
yp = [ y(2);
    mu * (1-y(1)^2) * ...
    y(2)-y(1) ];
```

Nr	Parameters	$\mu = 2.1$		$\mu = 100$		$\mu = 1000$	
		ode45	ode15s	ode45	ode15s	ode45	ode15s
1	NSuccSteps	11622	35663	162676	5080	1684393	591
2	NFailed	3039	6590	10649	1859	112248	225
3	NFEVals	87967	82929	1039951	15894	10779847	1883
4	N-DF/Dy	0	4	0	335	0	45
5	N-LU-decomp	0	10861	0	2333	0	289
6	NSolLinEq	0	82916	0	14888	0	1747
7	Time [s]	25.8906	80.2344	460.3594	15.0781	16430	2.4688

Ciekawostki: dla $\mu \rightarrow 0$ warto obejrzeć
http://en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Pol_oscillator
<http://mathworld.wolfram.com/vanderPolEquation.html>
http://www.scholarpedia.org/article/Van_der_Pol_oscillator



8 Zadania na ćwiczenia lub na pracownię

1. Wyznaczyć obszary stabilności absolutnej metod:

- (a) *m. jawna Eulera*
- (b) *m. niejawna Eulera*
- (c) *wzór trapezów.*

2. Rozwiązać teoretycznie równanie (1).
3. Plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób które już słyszały tę plotkę, oraz liczby osób które jeszcze tej plotki nie słyszały. Załóżmy, że 5 osób rozpoczyna rozprzestrzenianie plotki i po jednym dniu wie o niej już 10 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób?
4. (*Inny model rozprzestrzeniania się plotki*). Załóżmy teraz, że plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób według prawa Gompertza:

$$\frac{dy}{dt} = ky e^{-\left(\frac{73}{520}\right)t}$$

gdzie $y(t)$ jest liczbą osób, które słyszały plotkę po t dniach. Załóżmy, że 5 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób?

5. Wiadomo, że szybkość zmian temperatury danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała i temperaturą otoczenia (prawo Newtona). Ciało zamordowanego znaleziono o 19:30. Lekarz sądowy przybył o 20:20 i natychmiast zmierzył temperaturę ciała denata. Wynosiła ona $32.6^{\circ}C$. Godzinę później, gdy usuwano ciało, temperatura wynosiła $31.4^{\circ}C$. W tym czasie temperatura w pomieszczeniu wynosiła $21^{\circ}C$. Najbardziej podejrzaną osobą, która mogła popełnić to morderstwo - Jan G. - twierdzi jednak, że jest niewinny. Ma alibi. Po południu był on w restauracji. O 17:00 miał rozmowę zamiejscową, po której natychmiast opuścił restaurację. Restauracja znajduje się 5 minut na piechotę od miejsca morderstwa. Czy alibi to jest niepodważalne?
6. (*Ciąg dalszy zadania poprzedniego*). Obrońca Jana G. zauważył, że zamordowany był u lekarza o 16:00 w dniu śmierci i wtedy jego temperatura wynosiła $38.3^{\circ}C$. Załóżmy, że taką temperaturę miał on w chwili śmierci. Czy można dalej podejrzewać, że Jan G. popełnił morderstwo?

* * *