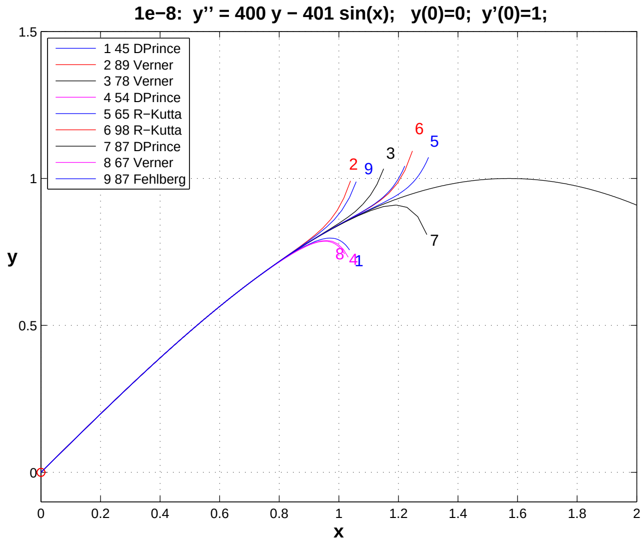
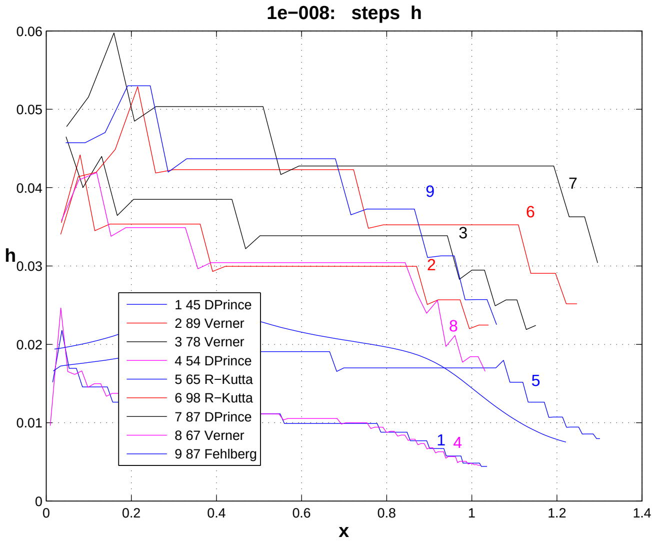
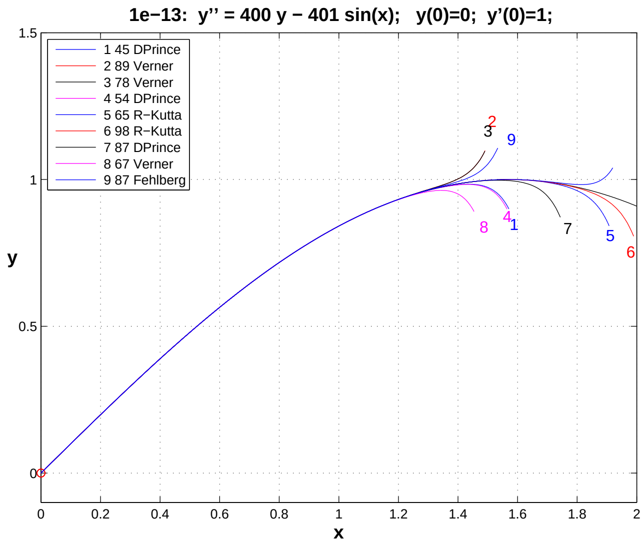
Wykład 10: NUMERYCZNE ROZWIĄZYWANIE RRZw

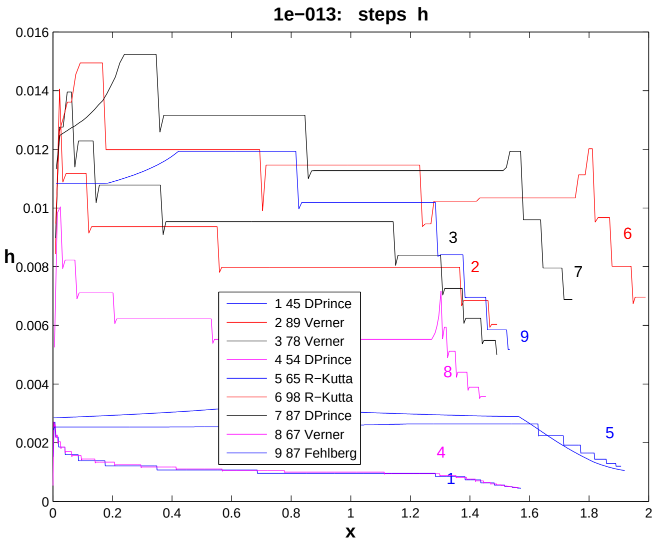
PRZYKŁADY ZAGADNIEŃ DO ROZWIĄZYWANIA, UZUPEŁNIENIE 6. WYKŁADU

1 y” = 400y-401sin(t) y(0)=0; y’(0)=1;









Tablica informująca o wynikach i kosztach poszczególnych metod dla parametru $Toll = 1e - 13$

Nr	method	t_end	NSteps	NFailed	NFEVals	time [sec.]
1	Dormand Prince 4(5)	1.22566	1636	16	11571	8.375583
2	EmbVerner 89	1.14988	177	6	2944	2.428584
3	EmbVerner 78	1.15041	162	9	2236	2.229676
4	Dormand Prince 5(4)	1.21942	1581	92	11718	26.623538
5	Runge-Kutta 6(5)	1.56222	794	7	7218	20.922176
6	Runge-Kutta 9(8)	1.65014	180	7	3008	5.841481
7	Dormand Prince 8(7)	1.39839	147	6	2002	4.758454
8	EmbVerner 6(7)	1.1116	253	11	2650	7.981413
9	Fehlberga 8(7)	1.19244	152	6	2067	4.949833
10	Verner 6(5)	1.57559				118.190994

Obliczenia prowadzono na odc. [0, 2].

Testy obliczeń numerycznych były kończone gdy $abs(y(1) - sin(t)) > 0.0001$, a same obliczenia kończono gdy $abs(y(1) - sin(t)) > 0.1$.

2 Ruch drgający

1. **Zadanie matematyczne: narysować** *Krzywe Lissajous*

$$\begin{cases} x'' &= -k_x x\,, \\ y'' &= -k_y y\,. \end{cases}$$

Warto zastosować animację przedstawiając ruch kulki na płaszczyźnie i równocześnie na rzutach wycinka płaszczyzny na osie **Ox** i **Oy**.

2. **Równanie wahadła matematycznego** ($\alpha = \alpha(t)$ [rad]):

$$ml\alpha'' = -mg\sin\alpha - k\alpha'$$

3. **To samo równanie, zlinearyzowane dla niewielkich odchyleń wahadła** ($\sin\alpha \simeq \alpha$):

$$ml\alpha'' + k\alpha' + mg\alpha = 0\,.$$

4. **Drgania pojedynczej sprężyny**
   - **drgania swobodne**

$$mx'' + kx = 0 \qquad (k > 0)$$

   - **drgania tłumione – tarcie**

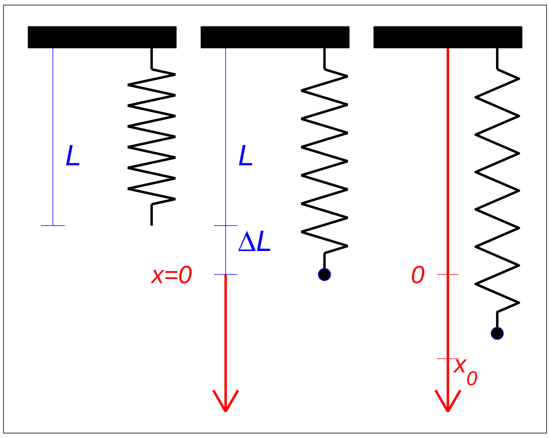
$$mx'' + rx' + kx = 0 \qquad (k, r > 0)$$

   - **sprężyna z podwieszoną kulką**

$$mx'' = -\frac{mg}{\Delta L}x - rx'$$

gdzie: ΔL – wydłużenie sprężyny,
m – masa kulki, r – opór ośrodka,
k – współczynnik sprężystości,
($mg = k\Delta L$).

Drganie masy na sprezynie



5. **Jednowymiarowy układ jednakowych sprężyn** - kulki połączone sprężynami tworzą jednowymiarowy łańcuch i ślizgają się bez tarcia

$$m_j x_j'' \equiv \vec{F}_j = k\left[(x_{j+1} - x_j) - 1\right] + k\left[(x_{j-1} - x_j) + 1\right],$$

czyli

$$x_j'' = \frac{k}{m_j}(x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}) \qquad (j = 1, 2, ..., n)\,.$$

Warunki brzegowe: $x_0(t) = 0$, $x_{n+1}(t) = n + 1$. Należy dołączyć warunki początkowe...
Dla chętnych: Proszę spróbować dołączyć tarcie, użyć sprężyn rozmaitej długości, sprężystości...

6. **Siatka sprężynowa** - wyobraźmy sobie siatkę sprężynową, rozpiętą na stałej, nieruchomej ramie...

$$m_i \vec{x}_i'' = \sum_j \vec{F}_{i,j} + \vec{G}_i\,,$$

gdzie

$$\vec{F}_{i,j} = \frac{(\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{d_{ij}} * (d_{ij} - l) * k\,, \qquad \vec{G}_i = -r * ||\vec{x}_i\,'||_2^\alpha * \frac{\vec{x}_i\,'}{||\vec{x}_i\,'||_2}\,,$$

$d_{ij} = ||\vec{x}_i - \vec{x}_j||_2$ – odległość kulek, l – długość sprężynek w spoczynku, proszę wypróbować $\alpha = 2, 1$.
Należy dołączyć warunki początkowe...
Dla chętnych: Siatka jest ustawiona pionowo i należy dołączyć *siłę ciążenia*.

7. **rezonans** (drgania z funkcją wymuszającą, dźwięk)

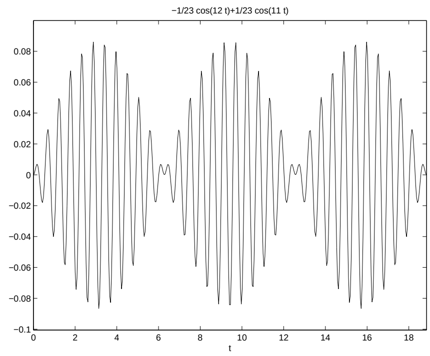
$$mx'' + kx = A\cos(\omega t)$$

   - Należy rozwiązać zagadnienie początkowe

$$y'' + 144y = \cos(11t), \qquad y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 0\,.$$

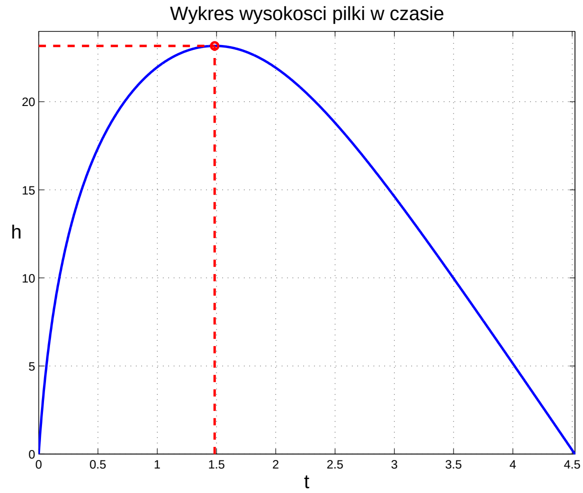
Z pomocą matlabowskiego Symbolic Toolbox'u, otrzymujemy:

```
% pexample4.m = przyklad z
%   Numerical Methods for ODEs
% asz 13.04.2010
y=dsolve('D2y+144*y=cos(11*t)',...
     'y(0)=0, Dy(0)=0','t')
%y=-1/23*cos(12*t)+1/23*cos(11*t)
  ezplot(y,[0, 6*pi])
```



3 Rzut pionowy, rzut ukośny

1. **Ruch piłki podrzuconej pionowo do góry** jej wysokość: $h = h(t)$



(a) ruch do góry:

$$mh'' = -mg - kv^2\,,$$

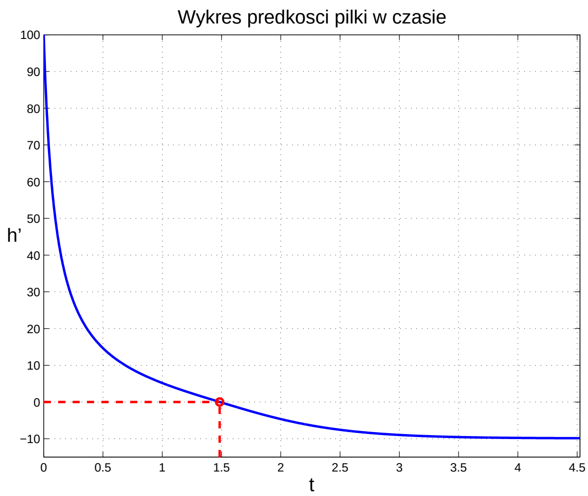
$h(0) = 0, \quad v(0) = v_0 \gg 0,$
$?\ t = t_1 : v(t_1) = 0\,.$

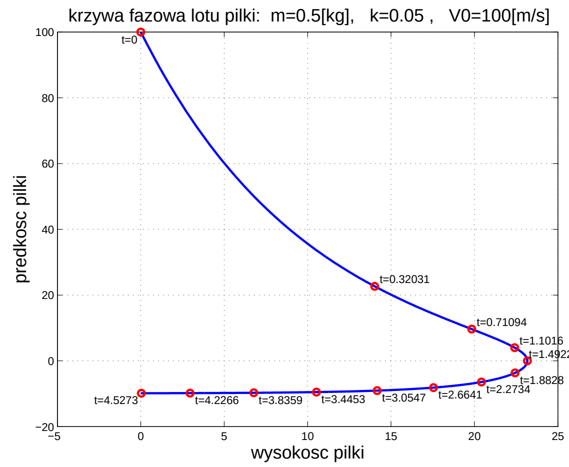
(b) spadanie:

$$mh'' = -mg + kv^2\,,$$

$h(t_1)$ =znane, $\quad v(t_1) = 0 \gg 0,$
$?\ t = t_2 : h(t_2) = 0\,.$

wykres $(h(t), h'(t))$
w przestrzeni fazowej...





2. **Spadanie ciała** (por. (**[GS]** przykład 5.5)

3. **Rzut ukośny lub tor pocisku** $(x(t),\, y(t))$ przy strzelaniu z niegwintowanej armaty:

$$mx'' = -c(\sqrt{x'^2 + y'^2} * x')\,,$$

$$my'' = -mg - c(\sqrt{x'^2 + y'^2} * y')\,.$$

Warunki początkowe (v_0 = prędkość początkowa, ϕ_0 = kąt podniesienia lufy):
$x(0) = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad x'(0) = v_0\cos(\phi_0)\,, \quad y'(0) = v_0\sin(\phi_0)\,.$
Zadanie polega na takim dobraniu kąta podniesienia lufy, aby trafić w wybrany cel...

4 Inne zadania

1. **Ładunki elektryczne w pudełku**

$$\vec{x}_i{}'' = \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij} \qquad \text{gdzie} \qquad \vec{F}_{ij} = k\frac{q_i q_j}{d_{ij}^2}\frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{d_{ij}}\,.$$

2. **Pies i Zając** (można rozszerzyć na stado psów lub zajęcy), oznaczenia:

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{Z} = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = ||\vec{P}'||_2 = a \quad \text{(prędkość psa)}\,,$$

i równanie:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{a}{||\vec{Z} - \vec{P}||_2} \begin{bmatrix} u - x \\ v - y \end{bmatrix}.$$

animacja: Dane: tor ruchu zająca: $(u(t), v(t))$; **Wyniki:** tor ruchu psa: $(x(t), y(t))$...

3. **Zagadnienie brzegowe - rozkład temperatury**

$$T'' - cT' = 0\,, \quad T(0) = 1\,, \quad T(1) = 0\,.$$

($0 < c$ – parametr przyjmujący wartości np: $c = 1, 10, 100, 1000, \ldots$).
Uwaga Można *strzelać* od strony lewej do prawej, albo od strony prawej do lewej...

5 Równania orbit – materiały ksero

1. **Orbita w kształcie elipsy**

G.E.Forsythe, M.A.Malcolm, C.B.Moler, `Computer methods for mathematical computations`, **Prentice Hall (1977)**

$$x''(t) = -\frac{\alpha^2 x(t)}{R(t)}\,, \qquad y''(t) = -\frac{\alpha^2 y(t)}{R(t)}\,, \qquad \text{gdzie} \qquad R(t) = (x^2 + y^2)^{3/2}\,,$$

z warunkiem początkowym

$$x(0) = 1 - \gamma\,, \quad x'(0) = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = \alpha\sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}}\,, \qquad \text{dla} \quad \alpha = \text{const}\,, \gamma = \text{const}\,, 0 < \gamma < 1\,.$$

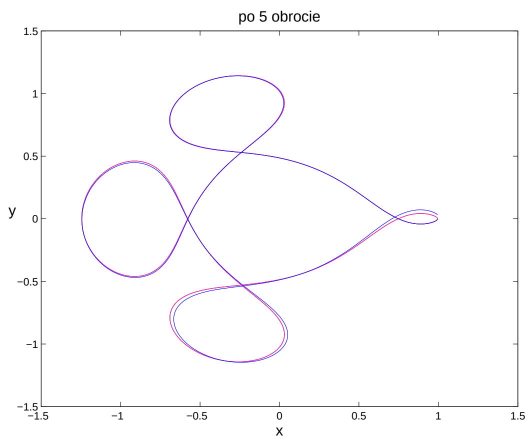
Okres rozwiązania jest równy $\frac{2\pi}{\alpha}$. Proszę przyjąć np. $\gamma = \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ i sprawdzić okresowość rozwiązania numerycznego...

2. **Orbita w kształcie jak w materiałach kserowanych**

Krupowicz – str. 272-274 – równania podane w materiałach kserowanych.

3. **Orbita najtrudniejsza**

E.Hairer – str. 129-130; A.Palczewski – str. 154-156 - równania podane w materiałach kserowanych.



obrot	blad x	blad y	blad x'	blad y'	l.krok	powt.
01	1.018552e-009	5.090078e-006	8.024332e-004	3.235303e-007	7393	53
02	1.678620e-008	2.096801e-005	3.305516e-003	5.567584e-006	10420	45
03	1.471289e-007	9.646535e-006	1.518218e-003	2.462914e-005	7783	53
04	4.265279e-005	1.011035e-004	1.647708e-002	6.797473e-003	7664	50
05	1.461869e-003	3.105359e-002	6.174197e-001	1.308122e+000	7558	41

6 (Uzup.W.6.) Metody włożone (embedded methods, adaptive methods)

1. **metoda Mersona** zaprezentowana na 6. wykładzie, zawierała poprawkę $E = ((9k_3 - 8k_4) + (k_5 - 2k_1))h/30$ umożliwiającą szacowanie błędu lokalnego, a dalej sterowanie krokiem... Metodę tę możemy zapisać następująco (podaję jedynie dolne wiersze):

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline & c^T \\ & \hat{c}^T \\ \hline & E^T \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} a & b & & & & \\ \hline & 1/6 & 0 & 0 & 2/3 & 1/6 \\ & 1/10 & 0 & 3/10 & 2/5 & 1/5 \\ \hline & -1/15 & 0 & 3/10 & -4/15 & 1/30 \end{array}$$

Metoda Mersona jest metodą pięcioetapową i patrząc na tabelkę w p.2.4 wykładu 6-go widzimy, że nie może ona być rzędu 5-go. I rzeczywiście, tylko w szczególnych wypadkach – gdy RR jest liniowe – metoda $\hat{c}^T$ osiąga rząd 5-ty... W ogólnym wypadku wiersz $\hat{c}^T$ realizuje jedynie metodę rzędu trzeciego.
Współczynniki poprawki E podane są w wierszu E^T tabeli i są różnicą wierszy $\hat{c}^T$ i c^T.

2. **metoda Englanda 4(5)**

$$\begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & & & \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & & & & \\ 1 & 0 & -1 & 2 & & & \\ 2/3 & 7/27 & 10/27 & 0 & 1/27 & & \\ 1/5 & 28/625 & -125/625 & 546/625 & 54/625 & -378/625 & \\ \hline & 1/6 & 0 & 2/3 & 1/6 & 0 & 0 \\ & 1/24 & 0 & 0 & 5/48 & 27/56 & 125/336 \\ \hline & -1/8 & 0 & -2/3 & -1/16 & 27/56 & 125/336 \end{array}$$

3. **metoda Rungego-Kutty-Fehlberga 4(5)** (RKF45) małe są współczynniki w rozwinięciu błędu lokalnego

$$\begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & & \\ 1/4 & 1/4 & & & & & \\ 3/8 & 3/32 & 9/32 & & & & \\ 12/13 & 1932/2197 & -7200/2197 & 7296/2197 & & & \\ 1 & 439/216 & -8 & 3680/513 & -845/4104 & & \\ 1/2 & -8/27 & 2 & -3544/2565 & 1859/4104 & -11/40 & \\ \hline & 25/216 & 0 & 1408/2565 & 2197/4104 & -1/5 & 0 \\ & 16/135 & 0 & 6656/12825 & 28561/56430 & -9/50 & 2/55 \\ \hline & 1/360 & 0 & -128/4275 & 2197/75240 & 1/50 & 2/55 \end{array}$$

4. **kserokopie innych metod włożonych otrzymają Państwo na wykładzie...**

7 Zadania na ćwiczenia lub na pracownię

1. Ułożyć i przebadać numerycznie układ jednowymiarowy sprężyn (p. 2.5) dla różnej długości sprężyn...
2. Jak zmienić równania ruchu piłki (3.1) gdy opór będzie proporcjonalny do pierwszej potęgi prędkości?
3. Jak rozszerzyć zadanie o psie i zającu (p.4.2) na stado psów lub stado zajęcy?
4. Jak wyglądają kształty krzywych rozkładu temperatur (zad. p. 4.3) w zależności od wielkości parametru c?
5. Wyjęty z pieca chleb ma temperaturę 200°C. Po 10 minutach temperatura chleba spadła do 80°C. Po jakim czasie temperatura wyniesie 25°C? Założenie: Prędkość stygnięcia chleba jest proporcjonalna do różnicy temperatur chleba i otoczenia, a w pomieszczeniu temperatura wynosi 20°C.

* * *