

# Wykład 6: METODY RUNGEGO-KUTTY

## 1 Modyfikacje metody Eulera

1. Niejawny wzór trapezów z poprzedniego wykładu, może zostać zamieniony metodą jawną, znaną pod nazwą **Improved Euler's method** (wykresy **PC-Euler**)

$$\begin{cases} \hat{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n); \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, \hat{y}_{n+1})]; \\ x_{n+1} = x_n + h; \end{cases}$$

Tę metodę możemy interpretować jako wykonanie jednej iteracji w celu wyznaczenia wartości  $y_{n+1}$ .

1a. Takie postępowanie nosi nazwę metody **Predictor-Corrector** – iteracje można wykonywać poważniej:

- $y_{n+1}^{predict}$  = jawny wzór trapezów,
- $y_{n+1}^{correct_1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{predict})];$
- $y_{n+1}^{correct_{k+1}} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{correct_k})];$

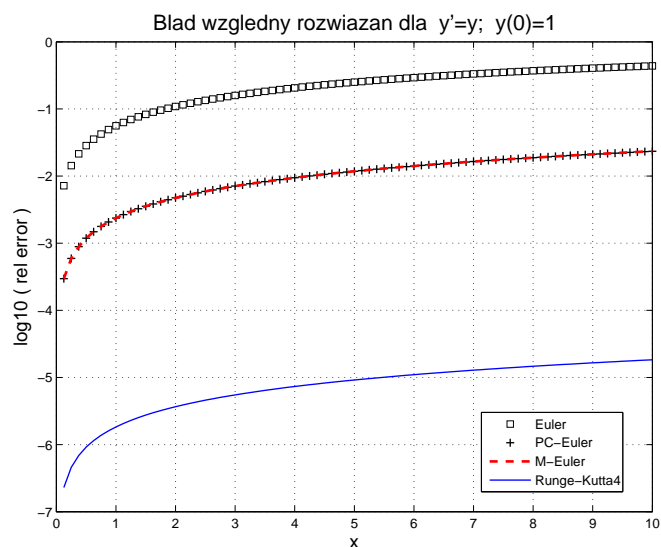
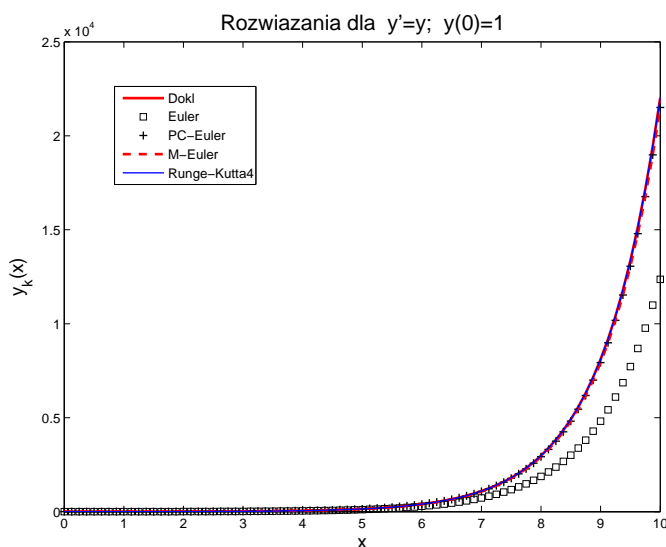
2. **Midpoint Euler's method** – jawna wersja metody punktu środkowego (wykresy **M-Euler**)

$$\begin{cases} y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n); \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_{n+\frac{1}{2}}); \\ x_{n+1} = x_n + h; \end{cases}$$

2a. oto wersja niejawna metody punktu środkowego:

- $k1 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k1);$
- $y_{n+1} = y_n + hk1;$

Oto wyniki otrzymane metodami Eulera: jawna (RK1), Predictor-Corrector (RK2), Midpoint (RK2), oraz metodą Rungego-Kutty 4-go rzędu (RK4)



Metoda jawna Eulera i jej modyfikacje należą do metod Rungego-Kutty. Oto schematy najprostszych metod Rungego-Kutty

1. rzędu pierwszego - metoda jawna Eulera (1768):

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1 & \end{array} \quad \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a),$$

niejawna (wzór wsteczny Eulera):

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(b),$$

2. rzędu drugiego (Runge 1895, Heun 1900, Kutta 1901):

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline 0 & 1 & \end{array} \quad \text{jawna metoda} \\ \text{punktu środkowego:} \\ \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array} \quad \text{jawny} \\ \text{wzór trapezów:} \\ \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)),$$

3. rzędu czwartego:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \quad \sim \text{wzór Simpsona:} \quad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)).$$

## 2 Metody Rungego-Kutty (RK)

Rozwiązujemy zagadnienie początkowe

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (\text{ściślej: } \mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0).$$

### 2.1 Ogólna postać metody RK

Wśród schematów jednokrokowych bardzo popularnymi są metody Rungego-Kutty (jawne, półjawne, niejawne, ang: explicit, semiimplicit, implicit).

**Definicja** Ogólnie, *s-etapową metodę Rungego-Kutty* możemy przedstawić w postaci

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi_f(h; x_n, y_n, y_{n+1}) \tag{1}$$

gdzie

$$\Phi_f(h; x_n, y_n, y_{n+1}) = \sum_{i=1}^s c_i k_i,$$

dla

$$k_i = k_i(h; x, y) = f\left(x + a_i h, y + h \sum_{j=1}^s b_{ij} k_j\right).$$

W metodach jawnych:  $b_{ij} = 0$  dla  $i \leq j \leq s$ , półjawnych:  $b_{ij} = 0$  dla  $i < j \leq s$  (por. [Pa] s. 35) □

Prawdziwe są zależności:

$$a_i = \sum_{j=1}^s b_{ij}, \quad c_1 + \dots + c_s = 1.$$

Popularnym sposobem prezentowania metody RK jest zestawienie wszystkich jej współczynników w tablicy:

$$\begin{array}{c|ccc} a_1 & b_{11} & \dots & b_{1s} \\ a_2 & b_{21} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_s & b_{s1} & \dots & b_{ss} \\ \hline & c_1 & \dots & c_s \end{array} \tag{2}$$

## 2.2 Wyznaczanie współczynników metody RK

Aby wyznaczyć wartości nieznanych parametrów metody, traktujemy punkt  $(x_n, y_n)$  jako punkt startowy naszej metody, w którym spełniona jest równość:  $y(x_n) = y_n$ . Rozwijamy w tym punkcie, w szeregi Taylora

- rozwiązanie dokładne  $y(x_n + h)$ ,
- wszystkie wielkości pomocnicze  $k_i$  dla  $i = 1, \dots, s$  oraz  $y_{n+1}$ ,

a następnie próbujemy wyzerować jak najwięcej początkowych współczynników rozwinięcia różnicy  $y(x_n + h) - y_{n+1}$  w szereg potęgowy względem  $h$ .

Tym sposobem, dla jawnej, 2-etapowej metody RK

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ a & b & \\ \hline & c_1 & c_2 \end{array} \quad \text{rozumianej jako} \quad \begin{array}{l} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + ah, y_n + bhk_1) \\ y_{n+1} = y_n + h(c_1k_1 + c_2k_2) \end{array}$$

otrzymujemy nieliniowy układ równań

$$a = b, \quad c_1 + c_2 = 1, \quad bc_2 = \frac{1}{2}.$$

Jak widać, rozwiązanie tego układu nie jest jednoznaczne...

## 2.3 Przykłady metod Rungego-Kutty

Przykładami niejawnych, 2-etapowych metod RK są:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

metoda półjawna rzędu 2

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

metoda rzędu 4

Do popularnych metod RK 4-go rzędu jeszcze należą:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/3 & 1/3 & & & \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 & & \\ 1/2 & 1/8 & 0 & 3/8 & \\ 1 & 1/2 & 0 & -3/2 & 2 \\ \hline & 1/6 & 0 & 0 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

metoda Mersona (4,5)

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 2/9 & 2/9 & & & \\ 1/3 & 1/12 & 1/4 & & \\ 3/4 & 69/128 & -243/128 & 270/128 & \\ 0.9 & -9 * 0.0345 & 9 * 0.2025 & -9 * 0.1224 & 9 * 0.0544 \\ \hline & 17/162 & 0 & 81/170 & 32/135 & 250/1377 \end{array}$$

metoda Scratona (4,5)

**Metoda Mersona (1957)** dla równań liniowych o stałych współczynnikach zachodzi związek:  $y(x_{n+1}) = y_{n+1} + E + O(h^6)$ , gdzie  $E = ((9k_3 - 8k_4) + (k_5 - 2k_1))h/30$ .

**Metoda Scratona (1964)** zachodzi związek:  $y(x_{n+1}) = y_{n+1} + E + O(h^6)$ , gdzie  $E = pq/(18.36r)$ ,  
 $p = 0.85k_1 - 2.43k_3 + 4.08k_4 - 2.5k_5$ ,  
 $q = 0.95k_1 - 4.05k_2 + 3.42k_3 - 0.32k_4$ ,  
 $r = k_1 - k_4$ .

## 2.4 Rzędy otrzymywanych metod

Poniższa tabelka ilustruje możliwy rząd otrzymywanej metody od jej liczby etapów

$p =$ rząd metody	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s =$ liczba etapów	1	2	3	4	6	7	9	11	$12 \leq s \leq 17$	$13 \leq s \leq 17$

Za chwilę przyjmiemy oznaczenie *drzewko* celem uproszczenia czynności wyznaczania równań na współczynniki metody. Prawdziwe są następujące zależności:

rząd $r$ drzewka	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
liczba drzewek danego rzędu	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719
rząd $p$ metody RK	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
liczba równań do rozwiązania	1	2	4	8	17	37	85	200	486	1205

(por. [Ha], str. 147, 154; [Kr], str. 192 )

Na str. 148 w [Ha] znajduje się następująca tablica:

**Table 2.2.** Trees and elementary differentials up to order 5

$q$	$t$	graph	$\gamma(t)$	$\alpha(t)$	$F^J(t)(y)$	$\Phi_j(t)$
0	$\emptyset$	$\emptyset$	1	1	$y^J$	
1	$\tau$	$\bullet_j$	1	1	$f^J$	1
2	$t_{21}$		2	1	$\sum_K f_K^J f^K$	$\sum_k a_{jk}$
3	$t_{31}$		3	1	$\sum_{K,L} f_{KL}^J f^K f^L$	$\sum_{k,l} a_{jk} a_{jl}$
	$t_{32}$		6	1	$\sum_{K,L} f_K^J f_L^K f^L$	$\sum_{k,l} a_{jk} a_{kl}$
4	$t_{41}$		4	1	$\sum_{K,L,M} f_{KLM}^J f^K f^L f^M$	$\sum_{k,l,m} a_{jk} a_{jl} a_{jm}$
	$t_{42}$		8	3	$\sum_{K,L,M} f_{KM}^J f_L^K f^L f^M$	$\sum_{k,l,m} a_{jk} a_{kl} a_{jm}$
	$t_{43}$		12	1	$\sum_{K,L,M} f_K^J f_{LM}^K f^L f^M$	$\sum_{k,l,m} a_{jk} a_{kl} a_{km}$
	$t_{44}$		24	1	$\sum_{K,L,M} f_K^J f_L^K f_M^L f^M$	$\sum_{k,l,m} a_{jk} a_{kl} a_{lm}$
5	$t_{51}$		5	1	$\sum f_{KLMP}^J f^K f^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{jl} a_{jm} a_{jp}$
	$t_{52}$		10	6	$\sum f_{KMP}^J f_L^K f^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{jm} a_{jp}$
	$t_{53}$		15	4	$\sum f_{KLP}^J f_M^K f^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{km} a_{jp}$
	$t_{54}$		30	4	$\sum f_{KLP}^J f_L^K f_M^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{lm} a_{jp}$
	$t_{55}$		20	3	$\sum f_{KMP}^J f_L^K f^L f_P^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{jm} a_{mp}$
	$t_{56}$		20	1	$\sum f_{KLP}^J f_M^K f^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{km} a_{kp}$
	$t_{57}$		40	3	$\sum f_{KLP}^J f_M^K f^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{lm} a_{kp}$
	$t_{58}$		60	1	$\sum f_K^J f_L^K f_{MP}^L f^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{lm} a_{lp}$
	$t_{59}$		120	1	$\sum f_K^J f_L^K f_M^L f_P^M f^P$	$\sum a_{jk} a_{kl} a_{lm} a_{mp}$

### 3 Zadania na ćwiczenia i na pracownię

1. Ile wynosi rząd niejawnej metody punktu środkowego, przedstawionej w punkcie **1.2a**?
2. Wyprowadzić równania na współczynniki metody postaci:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ a & a & \\ \hline b & 0 & b \\ \hline & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Jakiego rzędu metody można otrzymać?

3. Spróbować wyjaśnić co znaczy zwrot w uwadze o metodzie Mersona: *dla równań liniowych o stałych współczynnikach* testując tę metodę na prostych przykładach.
4. Porównać trzy metody 4-go rzędu (klasyczna RK, m. Mersona i m. Scratona) na tych samych przykładach (np.  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$ , na odcinku  $[0, 4]$ ), wykonując obliczenia ze stałym krokiem. Narysować wykresy błęd (bezwzględnego albo względnego); dla małych wartości warto zastosować skalę logarytmiczną...
5. Zastosować wprowadzone metody RK (zwłaszcza niejawne) do rozwiązywania ze stałym krokiem równań
  - $y' = x + 2y$ ,
  - $y' = x - 2y$ ,
 z warunkiem początkowym  $y(1) = 1$  na odcinku  $[1, 5]$ . Porównać błędy – bezwzględny i względny – na tym przedziale. Wykreślić te błędy. Wykonać obliczenia dla coraz mniejszego kroku  $h$ .
6. Rozwiązać zadania nr 9 i 10 z wykładu 4. za pomocą nowo poznanych metod.

\* \* \*