Wykład 4: Teoria – kilka podstawowych twierdzeń dla RRZw
Metody numeryczne – wprowadzenie

1 Teoria

Rozwiązujemy zagadnienie początkowe (ZP)

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x,\vec{y}), \qquad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \tag{1}$$

zakładając, że $\vec{y}$ oraz $\vec{f}$ są funkcjami wektorowymi

$$\vec{y} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^m, \qquad \vec{f} : \mathcal{R}^{m+1} \to \mathcal{R}^m .$$

1.1 Kilka przydatnych twierdzeń

(*Matwiejew - rozdz. 5, Palczewski - rozdz. 3*)

1. **Twierdzenie (Cauchy–Peano) o istnieniu rozwiązania lokalnego**
   • Niech funkcja $\vec{f}(x,\vec{y}) = \vec{f} : \mathcal{R}^{m+1} \to \mathcal{R}^m$ będzie funkcją ciągłą w obszarze domkniętym

   $$\Omega = \{(x,\vec{y}) : x \in [x_0-a,\, x_0+a], ||\vec{y}-\vec{y}_0|| \le b\} = [x_0-a,\, x_0+a] \times \Omega_1 ,$$

   zatem ograniczoną: $\sup_{(x,\vec{y})\in\Omega} ||\vec{f}(x,\vec{y})|| = M$.
   Wtedy ZP (8) posiada rozwiązanie, określone na $[x_0-\alpha,\, x_0+\alpha]$, gdzie $\alpha = \min\{a, b/M\}$. □

2. **Twierdzenie (Picard–Lindelöf) o jednoznaczności rozwiązania**
   • Jeśli funkcja $\vec{f}(x,.)$ spełnia w Ω dodatkowo ***warunek Lipschitza*** względem zmiennej $\vec{y}$
   (istnieje stała $L > 0$ taka, że $||\vec{f}(x,\vec{y}_1) - \vec{f}(x,\vec{y}_2)|| \le L||\vec{y}_1-\vec{y}_2||$ dla wszystkich $(x,\vec{y}_1),(x,\vec{y}_2) \in \Omega$),
   to ZP (8) posiada jednoznaczne rozwiązanie, określone na $[x_0-\alpha,\, x_0+\alpha]$, gdzie $\alpha = \min\{a, b/M, 1/L\}$. □

3. **Twierdzenie o regularności rozwiązania**
   • Jeśli funkcja $\vec{f}(x,\vec{y})$ posiada ciągłe pochodne do rzędu $p \ge 0$ włącznie, to każde rozwiązanie ZP (8) posiada ciągłe pochodne aż do rzędu $p+1$. □

4. **Twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązania od warunku początkowego** $(x_0, \vec{y}_0)$
   • Jeśli funkcja $\vec{f}(x,\vec{y})$ jest ciągła, ograniczona i spełnia warunek Lipschitza względem $\vec{y}$ w obszarze Ω, to jedyne rozwiązanie zależy w sposób ciągły od danych warunku początkowego $(x_0,\vec{y}_0)$. □

5. **Twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązania od parametrów RR**
   • Załóżmy, że funkcja

   $$\vec{f}(x,\vec{y},\vec{\mu}) = \vec{f} : [x_0-a,\, x_0+a] \times \Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \mathcal{R} \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^k \to \mathcal{R}^m$$

   jest ciągła,

   $\vec{f}(x,.,\vec{\mu})$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L_1 > 0$ dla dowolnych $(x,\vec{\mu}) \in [x_0-a,\, x_0+a] \times \Omega_2$,

   $\vec{f}(x,\vec{y},.)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L_2 > 0$ dla dowolnych $(x,\vec{y}) \in [x_0-a,\, x_0+a] \times \Omega_1$.

   Jeśli $\vec{y}_i : [x_0-a,\, x_0+a] \to \mathcal{R}^m$ (i=1,2) spełniają

   $$\vec{y}_i\,' = \vec{f}(x,\vec{y}_i,\vec{\mu}_i), \qquad \vec{y}_i(x_0) = \vec{y}_0 ,$$

   to

   $$||\vec{y}_1(x,\vec{\mu}_1) - \vec{y}_2(x,\vec{\mu}_2)|| \le \frac{L_2}{L_1}||\vec{\mu}_1-\vec{\mu}_2|| \left(e^{L_1|x-x_0|}-1\right)$$

   dla $x \in [x_0-a,\, x_0+a]$. □

6. **Twierdzenie o regularnej zależności rozwiązania od parametrów RR**
   • Załóżmy, że funkcja

   $$f(x,y,\mu) = f : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$$

   jest funkcją ciągłą i posiada ciągłe pochodne cząstkowe względem y oraz μ. Wówczas rozwiązanie $y(.,\mu)$ ZP

   $$y\,' = f(x,y,\mu), \qquad y(x_0) = y_0 ,$$

   posiada ciągłe pochodne względem μ, i spełnia

   $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y(x,\mu)}{\partial\mu}\right) = f_y(x,y(x,\mu),\mu)\frac{\partial y(x,\mu)}{\partial\mu} + f_\mu(x,y(x,\mu),\mu).$$

   □

1.1.1 Przykład – istotność warunku Lipschitza dla jednoznaczności rozwiązania

Rozpatrzmy ZP

$$y' = y^{\frac{1}{3}}\,, \qquad y(x_0) = 0\,,$$

które spełnia założenia twierdzena 1, ale nie spełnia założeń twierdzenia 2.
Ściślej – założenia tw. 2 są spełnione wszędzie poza prostą $y = 0$, ale nie są spełnione na tej prostej. Jako wynik otrzymujemy, że przez każdy punkt tej prostej przechodzą trzy rozwiązania

$$y_1(x) \equiv 0\,, \qquad y_2(x) = \left(\frac{2}{3}(x - x_0)\right)^{3/2}\,, \qquad y_2(x) = -\left(\frac{2}{3}(x - x_0)\right)^{3/2}\,.$$

1.2 Równania różniczkowe liniowe wyższego rzędu

Liniowe RR rzędu m dla $y = y(x)$ można zapisać

$$a_0(x)y^{(m)} + a_1(x)y^{(m-1)} + \ldots, + a_{m-1}(x)y' + a_m(x)y = f(x) \tag{2}$$

z ciągłymi współczynnikami na $[a, b] \subseteq \mathcal{R}$.

Definicje

- Jeśli $f(x) \equiv 0$, to równanie nazywa się ***jednorodnym***. □
- Jeśli a_0,...,a_m są stałymi, to otrzymujemy ***liniowe RR ze stałymi współczynnikami***; w przeciwnym wypadku jest to równanie ze ***zmiennymi współczynnikami***. □

Twierdzenie. Rozpatrzmy równanie (2) dla $a_0(x) \neq 0$ w $[a, b]$.
Niech $x_0 \in [a, b]$ oraz niech y_0, y_1,...,y_{m-1} będą dowolnymi m stałymi.
Istnieje jednoznacznie wyznaczona funkcja $y = y(x)$ określona na $[a, b]$, taka, że y jest rozwiązaniem (2) spełniającym ***warunki początkowe***

$$y(x_0) = y_0\,, \quad y'(x_0) = y_1\,, \ldots, \quad y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1}\,.$$ □

Twierdzenie. Liniowe, jednorodne RR (2) m-go rzędu z $a_0(x) \neq 0$ w $[a, b]$ zawsze posiada m liniowo niezależnych rozwiązań $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_m(x)$. Dowolne rozwiązanie równania jednorodnego może zostać przedstawione w postaci kombinacji liniowej tych rozwiązań

$$y(x) = c_1y_1(x) + \ldots + c_my_m(x)$$

poprzez odpowiedni dobór współczynników $c_1, \ldots, c_m$. □

Definicje

- Zbiór m liniowo niezależnych rozwiązań $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_m(x)$ jednorodnego RR (2) nazywa się the ***układem fundamentalnym rozwiązań*** równania. □
- Funkcja
$$y_c(x) = c_1y_1(x) + \ldots + c_my_m(x) \tag{3}$$
(kombinacja liniowa zbioru fundamentalnego z dowolnymi współczynnikami) nazywa się ***rozwiązaniem głównym równania jednorodnego*** (2). □
- Niech $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \subset \mathcal{C}^{(m-1)}_{([a,b])}$ będzie zbiorem m funkcji rzeczywistych. Wyznacznik
$$W(y_1, y_2, \ldots, y_m)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_m'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \ldots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$
nazywa się ***Wrońskianem*** funkcji $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. □

Twierdzenie. m rozwiązań $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)\}$ równania jednorodnego (2) tworzy układ funkcji ***liniowo niezależnych*** na $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy gdy $W(y_1, y_2, \ldots, y_m)(x) \neq 0$ dla co najmniej jednego punktu w $[a, b]$. □

Twierdzenie. Niech $y_p(x)$ będzie szczególnym rozwiązaniem niejednorodnego RR liniowego (2), oraz niech (3) będzie rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego.
Wtedy dowolne rozwiązanie $y(x)$ równania niejednorodnego (2) może zostać przedstawione w postaci ich sumy:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1y_1(x) + \ldots + c_my_m(x) + y_p(x)\,.$$

□

1.3 RR liniowe rzędu m, o stałych współczynnikach

1.3.1 Równania jednorodne

Są to równania postaci

$$y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + ... + a_{m-1} y' + a_m y = 0 \tag{4}$$

gdzie $a_1, ..., a_m$ - wielkości stałe.

Aby wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania (4) należy rozwiązać *równanie charakterystyczne*

$$\lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + ... + a_{m-1}\lambda + a_m = 0\,, \tag{5}$$

tzn. *znaleźć pierwiastki wielomianu charakterystycznego* (5)

1. **jeżeli pierwiastki charakterystyczne** $\lambda_1, ..., \lambda_k$ **są rzeczywiste i parami różne**, to do rozwiązania równania (4) wchodzi suma
$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + ... + c_k e^{\lambda_k x}\,,$$
2. **jeżeli λ jest k-krotnym pierwiastkiem charakterystycznym równania (5)**, to do rozwiązania ogólnego wchodzi składnik
$$(c_1 + c_2 x + ... + c_k x^{k-1}) e^{\lambda x}\,,$$
3. **jeżeli wśród pierwiastków równania charakterystycznego (5) istnieją parami różne pierwiastki zespolone**, np. $\lambda_1 = \alpha_1 + \mathbf{i}\beta_1$, $\lambda_2 = \alpha_2 + \mathbf{i}\beta_2$, to do rozwiązania ogólnego wchodzi suma
$$e^{\alpha_1 x}[c_1 \cos(\beta_1 x) + c_2 \sin(\beta_1 x)] \;+\; e^{\alpha_2 x}[c_3 \cos(\beta_2 x) + c_4 \sin(\beta_2 x)]\,,$$
4. **jeżeli pierwiastek zespolony** $\lambda = \alpha + \mathbf{i}\beta$ **jest np. k-krotnym** pierwiastkiem, to do rozwiązania wchodzi suma
$$e^{\alpha x}[(c_1 + c_2 x + ... + c_k x^{k-1})\cos(\beta x) \;+\; (c_{k+1} + c_{k+2} x + ... + c_{2k} x^{k-1})\sin(\beta x)]\,.$$

1.3.2 Równania niejednorodne

Prawa strona równania (4) ma postać funkcji zmiennej niezależnej:

$$y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + ... + a_{m-1} y' + a_m y = f(x) \tag{6}$$

a współczynniki $a_1, ..., a_m$ pozostają wielkościami stałymi.

Równanie (6) rozwiązujemy w dwóch krokach:

1. w pierwszym wyznaczamy całkę ogólną równania jednorodnego (4)
$$y(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_m y_m(x)\,,$$
2. w drugim przeprowadzamy *uzmiennianie stałych* – tzn. szukamy rozwiązania w postaci
$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + ... + c_m(x) y_m(x)\,. \tag{7}$$

   - Przygotowujemy układ równań liniowych dla pochodnych $c_1', ..., c_m'$
$$\begin{cases} c_1' y_1(x) & + & c_2' y_2(x) & + & ... & + & c_m' y_m(x) & = & 0\,, \\ c_1' y_1'(x) & + & c_2' y_2'(x) & + & ... & + & c_m' y_m'(x) & = & 0\,, \\ & & & & ... & & & & \\ c_1' y_1^{(m-1)}(x) & + & c_2' y_2^{(m-1)}(x) & + & ... & + & c_m' y_m^{(m-1)}(x) & = & f(x)\,. \end{cases}$$
   - Rozwiązujemy ułożony układ, znajdując zależności
$$c_1' \;=\; f_1(x), \quad ... \quad, c_m' \;=\; f_m(x)\,,$$
   - następnie całkujemy każdą z nich
$$c_1(x) \;=\; \int f_1(x)\mathrm{dx} + C_1, \quad ... \quad, c_m(x) \;=\; \int f_m(x)\mathrm{dx} + C_m$$

   i wstawiamy wyznaczone funkcje $c_1(x), ..., c_m(x)$ do ogólnej postaci (7) szukanego rozwiązania...

2 Metody numeryczne – wprowadzenie

Rozpoczynamy omawianie numerycznego rozwiązywania *zagadnień początkowych Cauchy'ego* dla równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \tag{8}$$

gdzie $\mathbf{y} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^m$, a funkcja $\mathbf{f} : \mathcal{R} \times \mathcal{R}^m \to R^m$ jest (dla uproszczenia) wystarczająco regularną funkcją. Przypomnijmy, że ciągłość funkcji $\mathbf{f}$ i spełnianie warunku Lipschitza względem zmiennej $\mathbf{y}$ wystarcza dla istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania (8)...

Celem naszym jest uzyskanie przybliżonych wartości $\mathbf{y}_{n+1} \approx \mathbf{y}(x_{n+1})$ dla $n = 0, 1, ...,$ gdzie $x_n = nh$, a *krok* $h > 0$ jest mały.

Definicja. ***Metodą jednokrokową*** nazywamy odwzorowanie $\mathbf{y}_{n+1} = \phi_h(x_n, \mathbf{y}_n)$, to znaczy algorytm, który pozwala wyznaczyć $\mathbf{y}_{n+1}$ jedynie na podstawie wartości x_n, $\mathbf{y}_n$, h oraz równania (8). □

2.1 Metoda Eulera

- **metoda jawna Eulera** – metoda została opracowana przez Leonharda Eulera w 1768r. Znając $\mathbf{y}(x)$ i $\mathbf{y}'(x)$ możemy zaproponować przybliżenie $\mathbf{y}(x+h) \approx \mathbf{y}(x) + h\mathbf{y}'(x)$ z błędem $O(h^2)$, definiując tym samym metodę

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n), \qquad n = 0, 1, ... \tag{9}$$

Definicja Niech będzie dane $x^* > x_0$. Mówimy, że **metoda**, która dla dowolnych $h > 0$ tworzy rozwiązanie-ciąg $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_n(h)$, $n = 0, 1, ..., (x^*/h)$ **jest zbieżna**, gdy, jeśli gdy $h \to 0$ i $n_k(h)h \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$, to prawdą jest że $\mathbf{y}_{n_k} \to \mathbf{y}(x)$ jednostajnie dla $x \in [x_0, x^*]$. □

Twierdzenie. Jeżeli funkcja $\mathbf{f}$ z równania (8) spełnia warunek Lipschitza względem zmiennej $\mathbf{y}$, to metoda jawna Eulera jest zbieżna.

Dowód na wykładzie... (por. **[Pa]** str. 143-156, **[Kr]** str. 29-32, 196-198, **[Iserles A.]** Lecture 9) □

Definicja. **Rzędem** ogólnej metody numerycznej $\mathbf{y}_{n+1} = \phi_h(x_n, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n)$, rozwiązującej równanie różniczkowe (8), jest największa liczba całkowita $p \geq 0$ taka, że

$$\mathbf{y}(x_{n+1}) - \phi_h(x_n, \mathbf{y}(x_0), \mathbf{y}(x_1), ..., \mathbf{y}(x_n)) = O(h^{p+1})$$

dla wszystkich małych $h > 0$, $n \geq 0$ i wszystkich wystarczająco regularnych funkcji $\mathbf{f}$ w równaniu (8). □

Wniosek. Metoda jawna Eulera (9) jest metodą rzędu pierwszego. □

2.1.1 Modyfikacje metody Eulera

Możemy zmodyfikować wprowadzoną metodę Eulera tworząc ogólnie *metodę theta*, dla $\theta \in [0, 1)$:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h[\theta\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) + (1-\theta)\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})], \qquad n = 0, 1, ... \tag{10}$$

- dla $\theta = 1$ otrzymujemy **jawną metodę Eulera**,
- dla $\theta \in [0, 1)$ otrzymujemy **metodę niejawną Eulera**; wtedy dla każdego kroku trzeba rozwiązać układ m, na ogół nieliniowych równań dla szukanego wektora $\mathbf{y}_{n+1}$.

W szczególności wybór $\theta = 0$ oraz $\theta = \frac{1}{2}$ dają metody znane pod nazwami:

- **wzór wsteczny Eulera:** $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})$,
- **wzór trapezów:** $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}h[\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})]$.

Wyznaczmy rząd metody niejawnej:

$$\mathbf{y}(x_{n+1}) - \mathbf{y}(x_n) - h[\theta\mathbf{y}'(x_n) + (1-\theta)\mathbf{y}'(x_{n+1})] =$$

$$[\mathbf{y}(x_n) + h\mathbf{y}'(x_n) + \frac{1}{2}h^2\mathbf{y}''(x_n) + \frac{1}{6}h^3\mathbf{y}'''(x_n)] - \mathbf{y}(x_n) - h\theta\mathbf{y}'(x_n) - h(1-\theta)[\mathbf{y}'(x_n) + h\mathbf{y}''(x_n) + \frac{1}{2}h^2\mathbf{y}'''(x_n)] + O(h^4)$$

$$= (\theta - \frac{1}{2})h^2\mathbf{y}''(x_n) + (\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{3})h^3\mathbf{y}'''(x_n) + O(h^4).$$

Wniosek. Wzór trapezów jest metodą rzędu 2, a w pozostałych wypadkach metoda niejawna Eulera (10) jest metodą rzędu 1. □

Rozwiązywanie na ogół nieliniowych równań na $\mathbf{y}_{n+1}$ można przeprowadzić metodami iteracyjnymi (m. iteracji prostych, m. Newtona, ...).

3 Zadania na Ćwiczenia i Pracownię

1. Sprawdzić, czy zagadnienie początkowe $\frac{dy}{dx} = 5y^{\frac{4}{5}}$, $y(0) = 0$
posiada jednoznaczne rozwiązanie dla funkcji $y = y(x)$.

2. Sprawdzić, czy zagadnienie początkowe $\frac{dy}{dx} = 5y^{\frac{4}{5}}$, $y(0) = 1$
posiada jednoznaczne rozwiązanie dla funkcji $y = y(x)$.

3. Zagadnienie początkowe ma postać $u' = u^{\alpha}$, $u(0) = u_0 \geq 0$ ze stałą $\alpha > 0$.
(a) Dla jakich α jest zagwarantowane istnienie i jednoznaczność rozwiązania na całej półprostej $x > 0$?
(b) Udowodnić, że dla $\alpha = 2$ i $u_0 = 1$ nie istnieje rozwiązanie określone dla wszystkich $x > 0$.
(c) Udowodnić, że dla $\alpha = \frac{1}{2}$ i $u_0 = 0$ istnieje więcej aniżeli jedno rozwiązanie. Jak te rozwiązania wyglądają?

4. Ile rozwiązań zagadnienia początkowego

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \qquad y(0) = 0$$

łączy się z osią $(-\infty, \infty)$? Jakie są wzory rozwiązań?

5. Sprawdzić, czy rozwiązanie równania oscylatora Van der Pola posiada lokalnie(?), globalnie(?) jednoznaczne rozwiązanie...

$$\begin{cases} y_1' &= y_2\,, \\ y_2' &= -y_1 + \epsilon\left(1 - y_1^2\right) y_2\,. \end{cases}$$

6. Znaleźć rozwiązanie ogólne

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 5\sin(2x)\,.$$

7. Rozwiązać zagadnienia początkowe

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 3\cos(2x)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,,$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 3\cos(3x)\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$

8. Sprawdzić, czy poniższe pary funkcji stanowią układy liniowo zależne, czy liniowo niezależne na R

1.	$p(x) = e^{3x}$	and	$q(x) = e^{3(x-1)}$,
2.	$p(x) = x^2 + x + 1$	and	$q(x) = 3x^2 - 2x + 1$,
3.	$p(x) = e^{4x}$	and	$q(x) = e^{-4x}$,
4.	$p(x) = 1$	and	$q(x) = \cos(x)$.

Wykorzystać Wrońskian by odpowiedzieć...

9. **Zadanie trudne numerycznie:** Znaleźć ogólną postać rozwiązania r.r.

$$y'' = 400y - 401\sin x\,. \tag{11}$$

Jak wygląda rozwiązanie zagadnienia początkowego z warunkami

$$y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\ ?$$

10. Sprawdzić, czy równanie różniczkowe okręgu $\{(x(t), y(t))\}$ o promieniu r ma postać

$$\begin{cases} y' &= x, \\ x' &= -y\,. \end{cases}$$

z warunkiem początkowym: $y(0) = 0$, $x(0) = r$.

- Rozwiązać to zagadnienie metodami: jawną Eulera, wzorem wstecznym Eulera oraz wzorem trapezów na odcinku $t \in [0, 50]$, wyznaczając wartości (x_{n+1}, y_{n+1}) z odpowiednich wzorów.
- Narysować wyznaczone krzywe na płaszczyźnie XY lub w przestrzeni XYT.

11. Zagadnienie początkowe

$$y' = \lambda y \qquad (\lambda = const), \qquad y(0) = 1$$

rozwiązujemy

- metodą jawną Eulera,
- metodą niejawną Eulera,
- wzorem trapezów

na odcinku $[0, 1]$ ze stałym krokiem $h > 0$. Przeanalizować jak będą wyglądać rozwiązania numeryczne, otrzymane tymi metodami dla $\lambda < 0$, $\lambda > 0$ i dla różnych, coraz mniejszych h.
Sprawdzić poprawność rozumowania na komputerze.

12. Analiza Numeryczna

To jest autentyczne, dość dawne już zadanie z Instytutu Fizyki Doświadczalnej UWr, związane z liczeniem rozpływów zanieczyszczeń wypuszczanych przez wysokie kominy...

W równaniu (12) występuje kilka parametrów, a wartość jednego z nich – x należy dobrać jako tę właściwą, optymalną... na podstawie rozwiązań równania y_1, $y_2, \ldots$

Należało wyznaczyć wartości y_1, $y_2, \ldots$ będące **wszystkimi zerami** *równania* (12) *dla konkretnej wartości parametru* x

$$(1-y)^3 - s\left(e^{-y/s} - 1\right) = \frac{1}{2}\, y^2\,(2-y)\,\left(1 + \frac{G(r)}{s^2 x^2}\right) , \tag{12}$$

$$\text{w którym} \quad r = 2 , \quad s = 0.0448 , \quad G(r) = r(0.4911 - 0.1018r - 0.003678r^2) .$$

Wybrano zbiór kolejnych wartości parametru $x = 8.08 : 8.08 : 80.8$, później mogą dojść dodatkowe...

* * *