Wykład 3: MATEMATYCZNE METODY ROZWIĄZYWANIA RR – C. D. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE PIERWSZEGO RZĘDU

1 Jednorodne równania różniczkowe pierwszego rzędu

Termin ***jednorodności*** pojawił się na poprzednim wykładzie w odniesieniu do RR wyższego rzędu. Dziś potrzebujemy jeszcze drugiej definicji dla równań rzędu pierwszego.
Rozpatrzmy postać ogólną

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)\,, \tag{1}$$

lub napisaną w postaci różniczkowej

$$M(x,y)\,dx \,+\, N(x,y)\,dy \,=\, 0\,. \tag{2}$$

W obu postaciach równań funkcją niewiadomą może być funkcja $y = y(x)$ lub $x = x(y)$ ...
Oto druga definicja *funkcji jednorodnej*

- **funkcja** $f(x,y)$ **jest nazywana jednorodną rzędu k** jeśli równość

  $$f(tx,ty) = t^k f(x,y)$$

  jest spełniona dla dowolnych x, y i t. □
  Jeśli funkcja f ***jest jednorodną rzędu zerowego, to RR*** (1) ***daje się rozwiązać.***
- **Przykłady**
  - $f(x,y) = x^4\cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad\to\quad f(tx,ty) = (tx)^4\cos\left(\frac{tx}{ty}\right) \,=\, t^4\left(x^4\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right) \,=\, t^4 f(x,y)\,.$
  - $M(x,y) = (x^2-y^2),\ N(x,y) = xy \quad\to\quad M(tx,ty) \,=\, ((tx)^2-(ty)^2) \,=\, t^2 M(x,y),$
    $N(tx,ty) \,=\, txty \,=\, t^2 N(x,y);$ obie funkcje są funkcjami jednorodnymi, tego samego rzędu.

Zatem

- **równanie** (1) **nazywa się jednorodnym** *jeśli jego funkcja* f *jest jednorodną rzędu zerowego.* □

I analogicznie

- **równanie** (2) **nazywa się jednorodnym** *jeśli* $M(x,y)$ *i* $N(x,y)$ *są obie jednorodnymi, tego samego rzędu.* □

1.1 Jak rozwiązywać równanie jednorodne – algorytm na przykładzie

Rozwiążmy równanie

$$(x^2-y^2)\,dx \,+\, xy\,dy = 0\,. \tag{3}$$

Po zamianie zmiennej niewiadomej (np. y) wzorem $y(x) = x\,u(x)$ zmienne dadzą się rozdzielić

$$y' = u + xu' \qquad\to\qquad dy \,=\, u\,dx \,+\, x\,du$$

i przekształcamy równanie (3) do postaci

$$\left(x^2-(xu)^2\right)dx \,+\, (x(xu))\,(u\,dx \,+\, x\,du) \,=\, 0 \qquad\to\qquad x^2\,dx \,+\, x^3u\,du \,=\, 0 \qquad\to\qquad dx \,+\, xu\,du \,=\, 0\,.$$

Ostatnie jest równaniem o rozdzielonych zmiennych; całkujemy

$$\int u\,du \,=\, -\int\frac{dx}{x}$$

otrzymując

$$\frac{u^2}{2} \,=\, -\ln(\,|x|\,) \,+\, \ln(\,|c|\,)\,.$$

Jeszcze trzeba wrócić do funkcji niewiadomej y

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 \,=\, \ln\left|\frac{c}{x}\right| \qquad\to\qquad y^2 \,=\, 2x^2\,\ln\left|\frac{c}{x}\right|\,.$$

I to już prawie koniec...

1.2 Czasem udaje się przekształcić RR do postaci jednorodnej

$$\text{Oto równanie} \qquad y' = \frac{4x^6 - y^4}{2x^4 y}\,,$$

które nie równaniem jednorodnym, ale można spróbować podstawienia

$$y(x) = u^k(x) \tag{4}$$

z odpowiednim k tak, aby uzyskać jednorodność. Sprawdźmy

$$ku^{k-1}u' = \frac{4x^6 - u^{4k}}{2x^4u^k} \qquad \to \qquad u' = \frac{4x^6 - u^{4k}}{2kx^4u^{2k-1}}\,.$$

To równanie będzie jednorodnym jeśli uda się spełnić dwa równania

$$6 = 4k = 4 + (2k-1)$$

za pomocą jednej niewiadomej. Widzimy, że jest to możliwe, bo $k = \frac{3}{2}$ jest dobre.

Równanie zostaje przekształcone dla nowej zmiennej (4) do równania jednorodnego

$$u' = \frac{4x^6 - u^6}{3x^4u^2} \qquad \to \qquad u' = \frac{4 - \left(\frac{u}{x}\right)^6}{3\left(\frac{u}{x}\right)^2}\,.$$

Proponuję dokończyć rozwiązywanie...

1.3 Równanie postaci $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$

Można go zredukować do RR jednorodnego

- **przez przesunięcie początku układu do punktu przecięcia obu prostych,**
- **jeśli proste się nie przecinają**, tzn. $Ax + By = k(ax+by)$, to równanie przybiera postać $y' = F(ax+by)$,
- **jeśli równanie ma postać** $y' = f(ax+by+c)$, to wystarczy wprowadzić nową zmienną $u(x) = ax+by+c$.

1.4 RR 2-go rzędu sprowadzalne do RR rzędu 1-go

(por. **[Ge]** rozdz. 1.9)

1. $y'' = f(x, y')$. Przyjmując $u(x) = y'(x)$ otrzymujemy równanie $u' = f(x, u)$.

2. $y'' = f(y, y')$. Poszukamy $y' = q(y)$. Otrzymujemy równanie na funkcję q

$$q'\,q = f(y, q)\,.$$

2 Dobrze- albo Źle- Postawione Zagadnienia

Zagadnienie początkowe (ZP)

1. $y' - \frac{y}{x} = 0, \qquad y(0) = 1$.
Rozwiązaniem ogólnym jest $y = cx$ i widać, że nie można spełnić warunku początkowego $1 = c * 0$.
- Ale możemy rozważać ZP postaci
  $x' - \frac{x}{y} = 0, \qquad x(1) = 0 \qquad$ z rozwiązaniem $\qquad x \equiv 0$.

2. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{1}{x}, \qquad y(0) = 1$.
Rozwiązaniem ogólnym jest $y = 1 + cx$, a warunek początkowy jest spełniony dla dowolnego c. Zatem istnieje nieskończona liczba rozwiązań.

3. $y' + \frac{y}{x} = 0, \qquad y(0) = 1$.
Rozwiązaniem ogólnym jest $y = \frac{c}{x}$, ale wynik rozważań jest taki jak w punkcie 1.

Jeżeli istnieje jednoznaczne rozwiązanie, które spełnia warunek początkowy, to mówi się, że zagadnienie zostało ***dobrze-postawione***.
Jeżeli nie ma rozwiązań lub istnieje nieskończenie wiele rozwiązań, to mówi się, że zagadnienie zostało ***źle-postawione***.

3 Układy równań różniczkowych

RR rzędu m występowały poprzednio w dwóch postaciach

jawnej	$y^{(m)} = f(x, y, y', ..., y^{(m-1)})\,,$
liniowej	$a_m(x)y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \ldots, +a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)\,.$

Dla formułowania twierdzeń i dla metod numerycznych – wygodniejszą będzie postać wektorowa jednego równania...

Wprowadzając nowe funkcje $y_1 = y,\ y_2 = y',...,\ y_m = y^{(m-1)}$, możemy powyższe równania zapisać w znacznie wygodniejszej postaci ***układu normalnego równań***

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, ..., y_m)\,, \\ & ... \\ y_m' &= f_n(x, y_1, ..., y_m)\,, \end{cases}$$

lub krótko

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$$

zakładając, że $\vec{y}$ and $\vec{f}$ są funkcjami wektorowymi

$$\vec{y} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^m\,, \qquad \vec{f} : \mathcal{R}^{m+1} \to \mathcal{R}^m\,.$$

4 Zadania na ćwiczenia lub laboratorium

1. Wyznacz RR rodziny okręgów $x^2 + (y - b)^2 = b^2$, a następnie rodziny krzywych ortogonalnych do tej rodziny okręgów. Narysuj obie rodziny krzywtch...

2. Sprawdzić czy funkcja

$$y(x) = x\int_1^x \frac{\cos t}{t} dt$$

jest szczególnym rozwiązaniem RR

$$x^2y'' - xy' + y + x^2 \sin x = 0$$

w przedziale $(1, +\infty)$.

3. (**[Ge]** 1.3.6) Rozwiązać równania jednorodne

$$\begin{array}{llll} a) & ty' = t + y, & b) & y' = \frac{y}{t} + \frac{t}{y}, \\ c) & y^2\,dt + t^2\,dy = ty\,dy, & d) & ty' = 3y - 2t - 2\sqrt{ty - t^2}, \\ e) & t^2y' = ty - y^2, & f) & \left((ty)^2 - t^4\right) y' = (ty)^2 - y^4; \end{array}$$

4. Czy podane funkcje są jednorodnymi? Jeśli tak, to którego rzędu? Jeśli tak, to zredukować równania do postaci jednorodnej.

$$\begin{array}{llll} a) & y' = 3x + 4y, & b) & y' = 3x + 4y - 2., \\ c) & y' = 30x^{1/2}y^{3/2} - 2\frac{x^3}{y}, & d) & y' = x^3y^3 + x^{1/2}, \\ e) & y' = \frac{x^3-y^3}{x^{1/2}+y^{1/2}}, & f) & y' = \sin\left(\frac{2x+3y+5}{x+y-2}\right); \end{array}$$

5. Rozwiązać

$$a)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x+y^2x}{4y+yx^2}, \qquad b)\quad y' = \sin\left(\frac{3x+y+5}{x-y+1}\right);$$

6. (**[GS]** 1.9.8) W belkę o grubości 12 cm wchodzi prostopadle kula z prędkością 200 [m/s], a po przebiciu wylatuje z niej z prędkością 60 [m/s]. Siła hamująca jest wprost proporcjonalna do kwadratu prędkości kuli. Wyznaczyć czas przelotu kuli przez belkę.

7. Czy w komputerze prawdą jest, że

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\ ?$$

8. A czy $a + (b + c) = (a + b) + c$?

* * *