Wykład 2: Podstawy – sporo nazw i definicji
Równania Różniczkowe pierwszego rzędu

Bywam w pok. 203 Instytutu Informatyki; proszę ważną pocztę kierować na adres domowy...

1 Klasyfikacja równań różniczkowych (RR)

Główne dwa typy równań różniczkowych to

1. **Równanie Różniczkowe Zwyczajne (RRZw) – Ordinary Differential Equation (ODE)** *jeśli równanie zawiera jedynie zwyczajne pochodne jednej lub wielu zmiennych niewiadomych, względem jedynej zmiennej niezależnej* (najczęściej jest to czas lub zmienna przestrzenna).
2. **Równanie Różniczkowe Cząstkowe (RRCz) – Partial Differential Equation (PDE)** *jeśli równanie zawiera pochodne cząstkowe jednej lub wielu zmiennych niewiadomych, względem dwóch lub większej liczby zmiennych niezależnych.*

- **Rzędem RR** *nazywamy najwyższy rząd pochodnej funkcji niewiadomej, jaki występuje w równaniu.*

  (a) RRZw 1-go rzędu: $(y')^3 = \sin(x)$, RRCz: $y_x = 0$ gdzie $y = y(t, x)$.

  (b) RRZw 4-go rzędu: $\frac{d^4y}{dx^4}\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = f(x)$, RRCz: $y_t - yy_{xxxx} = x\sin(t)$,

  (c) ogólna postać RRZw m-tego rzędu: $F(x, y, y', ..., y^{(m)}) = 0$. Wygodniejszym jest *wzór jawny*

  $$y^{(m)} = f(x, y, y', ..., y^{(m-1)})\,. \tag{1}$$

  Najczęściej w zagadnieniach naukowo–technicznych występują RR pierwszego lub drugiego rzędu.

- **Stopniem równania różniczkowego** *nazywamy najwyższą potęgę najwyższej pochodnej funkcji niewiadomej, która występuje w równaniu.*
  Wyżej – RR (a) jest równaniem stopnia trzeciego, podczas gdy (b) jest stopnia pierwszego.

- **RR nazywa się liniowym** *jeśli w równaniu nie ma iloczynów funkcji niewiadomej ani jej pochodnych przez siebie, nie ma ich potęg innych niż 1, ani funkcje te nie są argumentami funkcji nieliniowych.*

  Liniowe RRZw rzędu m dla $y = y(x)$ ma postać

  $$a_0(x)y^{(m)} + a_1(x)y^{(m-1)} + \ldots, + a_{m-1}(x)y' + a_m(x)y = f(x)\,. \tag{2}$$

  Jeśli współczynniki RR (2) nie zależą od x, to jest ono *równaniem różniczkowym o stałych współczynnikach.*

- **RR nazywa się nieliniowym** *jeśli któryś z powyższych warunków nie jest spełniony.*
  Nieliniowe RR są często bardzo trudne, a nawet niemożliwe do rozwiązania.

- **Liniowe RR nazywa się jednorodnym** *jeśli zero należy do jego rozwiązań.*
  Równanie liniowe i jednorodne posiada bardzo ważną własność:
  jeśli u i v są jego rozwiązaniami, to ich kombinacja liniowa $au + bv$ (dla dowolnych rzeczywistych a i b) także.
  Liniowe RR (2) będzie jednorodnym dla $f \equiv 0$.

- **Liniowe RR nazywa się niejednorodnym** *jeśli nie jest równaniem jednorodnym.*

- **Jednorodne RR pierwszego rzędu** – ***opowiem o tym następnym razem.***

- **Warunki początkowe.** *Jeżeli wszystkie warunki, aby rozwiązać sformułowane zagadnienie różniczkowe, są podane dla początkowej wartości zmiennej niezależnej – to nazywamy je* **warunkami początkowymi**. *A całe zagadnienie nazywamy* ***Zagadnieniem Początkowym (ZP) – Initial Value Problem (IVP)***.

- **Warunki brzegowe.** *Jeżeli warunki są podane w punktach końcowych zmiennej niezależnej – to nazywamy je* ***warunkami brzegowymi***. *A całe zagadnienie nazywamy* ***Zagadnieniem Brzegowym (ZB) – Boundary Value Problem (BVP)***.

- **Rozwiązanie RRZw** *jest funkcją, dookreśloną na przedziale, która spełnia RRZw dla wszystkich dopuszczalnych wartości zmiennej niezależnej.*
- **Rozwiązanie ogólne RRZw.** *Jeśli każde rozwiązanie RRZw* (1)*, rzędu* m*, może być otrzymane z* m*-parametrowej rodziny funkcji* (3)
$$G(x, y, c_1, \ldots, c_m) = 0\,, \tag{3}$$
to mówimy, że rodzina ta jest ogólnym rozwiązaniem RRZw (1)*.*
- **Rozwiązaniem szczególnym RRZw** *jest konkretna funkcja, która spełnia RRZw na odpowiednim przedziale, oraz spełnia jakieś dodatkowe warunki, np. warunki początkowe lub brzegowe.*

2 RRZw pierwszego rzędu – równanie o rozdzielonych zmiennych

Zakładamy, że RR dla funkcji $y = y(x)$ da się sprowadzić do następującej postaci
$$y' \;=\; \frac{f(x)}{g(y)}\,.$$
Oznaczmy przez F, G funkcje pierwotne dla funkcji f i g. Wówczas powyższe równanie możemy zapisać w postaci
$$G'(y)\, y' \;=\; F'(x)\,,$$
a po scałkowaniu obu stron względem zmiennej x otrzymujemy zależność
$$G(y(x)) \;=\; F(x) \,+\, c \tag{4}$$
z dowolną stałą c. Równanie (4) jest ***uwikłaną postacią*** szukanej funkcji y. Czasem jednak, bardzo ważnym dla rozwiązania jest wyznaczenie ***wzoru jawnego rozwiązania***.

Jeżeli np. założymy, że $g(y)$ nie znika na interesującym nas przedziale, to zależność (4) można rozwikłać, znajdując tym samym szukaną postać rozwiązania. (Bo $G'(y) \neq 0$ oznacza, że funkcja G jest funkcją monotoniczną swojego argumentu...)

Dla przykładu – równanie okręgu może mieć postać niejawną $x^2 + y^2 = 1$
lub postacie jawne $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$ dla $y = y(x)$, lub $x = \sqrt{1 - y^2}$, $x = -\sqrt{1 - y^2}$ dla $x = x(y)$.

3 Równania pierwszego rzędu – Rodziny krzywych, ortogonalność

3.1 Jak wyznaczyć RR rodziny krzywych

Równanie (3) jest równaniem m-parametrowej rodziny krzywych. Natomiast równanie
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{5}$$
może być traktowane jako ***rodzina okręgów z jednym wolnym parametrem*** a, lub jako ***rodzina okręgów o promieniu*** r ***z dwoma wolnymi parametrami – położenie na płaszczyźnie*** (a, b), lub ...

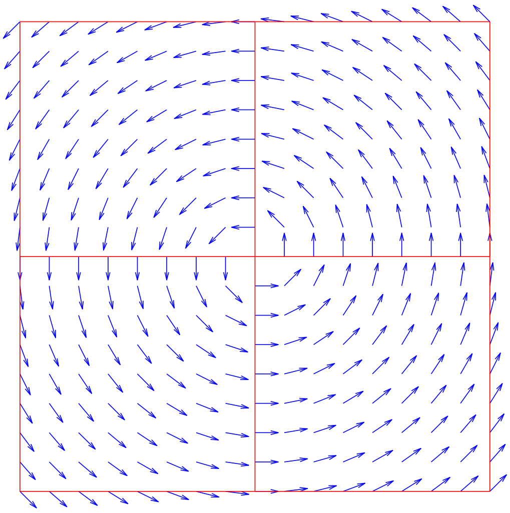
W pierwszym wypadku, jeśli interesuje nas RR tej jednoparametrowej rodziny okręgów, musimy zróżniczkować równanie (5) i wyeliminować z obu równań wolny parametr a.

Załóżmy, że interesuje nas funkcja $y = y(x)$ i szukane równanie będzie mieć postać
$$\frac{dy}{dx} = g(x, y) \qquad \text{lub} \qquad F(x, y, y') = 0\,.$$
Rząd wyznaczonego RRZw powinien być równy liczbie wolnych parametrów w równaniu rodziny krzywych.

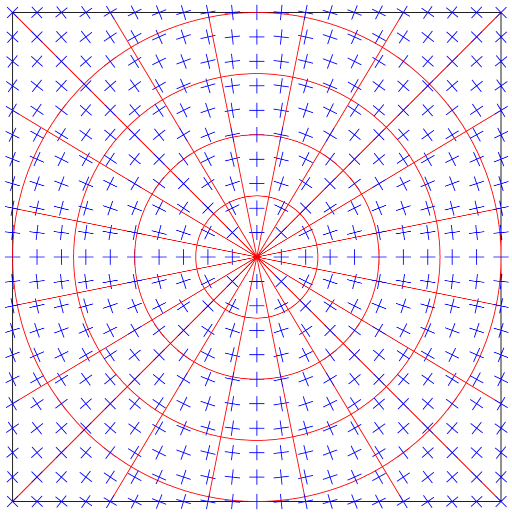
3.2 Krzywe ortogonalne do danej rodziny krzywych

Jeśli wyznaczone RRZw jest rzędu pierwszego, to nie ma problemu ze znalezieniem RRZw dla rodziny krzywych ortogonalnych do krzywych danej rodziny. Będzie ono mieć postać
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{g(x, y)} \qquad \text{lub} \qquad F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0\,.$$
Jeszcze należy wyznaczyć ogólne rozwiązanie (z jednym wolnym parametrem) otrzymanego równania...

3.3 Przykłady (MATLAB)



quiver.m : pole kierunków – okręgi



dwie rodziny krzywych ortogonalnych

4 Równanie liniowe pierwszego rzędu

4.1 Niejednorodne równanie liniowe $y' + p(x)y = q(x)$

Załóżmy, że funkcje p i q są ciągłe... Istnieją dwie możliwości. Oznaczmy: $P(x) = \int p(x)dx$.

- ***Uzmiennianie stałej.*** Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne $y' + p(x)y = 0$ otrzymując

$$y(x) \;=\; c \,\exp\left(\int -p(x)dx\right). \tag{6}$$

  Teraz zastępujemy stałą c nieznaną funkcją $c(x)$, i nowe y wstawiamy do równania głównego. Otrzymujemy równanie na $c(x)$

$$c'(x) \;=\; q(x)\,P(x).$$

  Rozwiązanie ogólne $c(x)$, z dowolną stałą C, wstawiamy do (6) i otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania liniowego, niejednorodnego.

- ***Czynnik całkujący.*** Drugą metodą jest wyznaczenie *czynnika całkującego* (**[Ge]** example 1.4.5). Mnożymy równanie przez czynnik $c(x)$, otrzymujemy

$$c(x)y' + p(x)c(x)y = c(x)q(x).$$

  Jako czynnik całkujący $c(x)$ winno spełniać zależność

$$c'(x) = p(x)c(x).$$

  Rozwiązujemy. Rozwiązaniem (dla $const = 1$) jest wprowadzone wcześniej $P(x)$. Wykorzystujemy je sprowadzając równanie do postaci

$$(y\,P(x))' \;=\; q(x)\,P(x)\,.$$

  Wystarczy je jeszcze scałkować... (por. Przykład)

4.2 Przykład

Niech $p(x)$ i $q(x)$ będą funkcjami kawałkami ciągłymi na przedziale $[a, b]$ i niech $x_0 \in [a, b]$. Rozpatrzmy *zaganienie początkowe*

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Jednoznacznym i ciągłym rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest

$$y(x) = \exp^{-P(x)} \int_{x_0}^{x} \exp^{P(t)} q(t)dt \;+\; y_0 \exp^{P(x_0)-P(x)}$$

dla $P(x) = \int p(x)dx$.

4.3 Równanie Bernoulliego

$$y' + p(x)y = q(x)y^r \qquad \text{dla} \qquad r \in \mathcal{R} \setminus \{0,1\}. \tag{7}$$

Wprowadzając funkcję $u = y^{1-r}$ sprowadzamy równanie (7) do równania liniowego... (por. **[Ge]** rozdz. 1.5)

5 Zadania na ćwiczenia lub laboratorium

1. Rozwiązać, szukając $y = y(x)$

$$y' = 0, \qquad y'' = 0, \qquad y''' = 0, \qquad y^{(4)} = 0.$$

2. Rozwiązać, szukając $u = u(x,y)$, a później szukając $u = u(x,y,z)$

$$u_x = 0, \qquad u_y = 0, \qquad u_{xx} = 0, \qquad u_{xy} = 0.$$

3. Wykreślić pola kierunków dla RRZw:

a. $y' = \frac{y}{x}$, b. $y' = -\frac{y}{x}$, c. $y' = \frac{x}{y}$,

d. $y' = -\frac{x}{y}$, e. $y' = (a - by)y$, f. $y' = (y^2 - y - 2)(1 - y)^2$,

g. $y' = \frac{\sin x}{\sin y}$, h. $y' = \frac{\sin y}{\sin x}$, i. $y' = -\frac{\sin y}{\sin x}$.

Które z rodzin są wzajemnie ortogonalnymi? Rozwiązać RRZw...

4. Wyznaczyć i narysować rodziny krzywych ortogonalnych do podanych rodzin krzywych (**[Ge]** 1.6.6):

$$y^2 + 2Ct = 0, \quad C > 0; \qquad t^2 - y^2 = C^2; \qquad t^2 + \frac{1}{2}y^2 = C^2; \qquad t^2 + y^2 = 2Ct; \qquad y = Ct^2;$$

5. (**[Ge]** 1.4.8) Rozwiązać zagadnienia początkowe

a) $y' + y\tan t = \frac{1}{\cos t}$, $y(0) = 0$; *b)* $y' = 2y + e^t - t$, $y(0) = \frac{1}{4}$;

c) $ty' + y = te^{t^2}$, $y(1) = 2$; *d)* $ty' + 2y = \cos t$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$;

e) $y' = 2ty + 3t^2e^{t^2}$, $y(0) = 1$; *f)* $ty' + y = t\sqrt{t}$, $y(1) = 2$;

6. Równania Bernoulliego (**[Ge]** 1.5.4, 1.5.5)

a) $y' + y = y^2$; *b)* $\mathrm{d}y = (y^2e^t - y)\mathrm{d}t$;

c) $ty' - y^2 \ln t + y = 0$, $y(e) = 1$; *d)* $ty^2y' + y^3 = 1$, $y(1) = 2$;

7. (***GRAFIKA i Błędy numeryczne***)
zadeklarować trzy funkcje obliczające wartości $(x-1)^8$ następującymi algorytmami:

- $y = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - ...$ – (algorytm zwykły),
- $y = ...(((x-8)x + 28)x - 56)x + ...$ – (schemat Hornera),
- $a1 = x - 1;\quad a2 = a1 * a1;\quad a4 = a2 * a2;\quad y = a4 * a4$ – (najmniej działań arytmetycznych).

Następnie narysować w jednym oknie wszystkie trzy wykresy na przedziale $[0.98\,,\ 1.02]$, dobierając łatwe do rozróżnienia kolory poszczególnych krzywych (łamanych). Wybrać ¨dobrą¨ kolejność rysowanych funkcji...

8. (***GRAFIKA i Błędy numeryczne***)
narysować okrąg o promieniu r.

* * *